Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord 28 mai 2019

Exercice 1 — 5 points

Partie A

1. (a)

On cherche $p(1,35 \leqslant X \leqslant 1,65)$

D'après la calculatrice :
$p(1,35 \leqslant X \leqslant 1,65) \boxed{\approx 0,968 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

(b)

On veut que $p(1,35 \leqslant X \leqslant 1,65) = 0,98$.

$1,35 \leqslant X_1 \leqslant 1,65$
$\iff -0,15 \leqslant X_1 - 1,5 \leqslant 0,15$
$\iff \dfrac{-0,15}{\sigma_1} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0,15}{\sigma_1}$
Alors $p(1,35 \leqslant X \leqslant 1,65) = 0,98$
$\iff p\left(\dfrac{-0,15}{\sigma_1} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0,15}{\sigma_1}\right) = 0,98$

On a, par symétrie :
$p\left(\dfrac{-0,15}{\sigma_1} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0,15}{\sigma_1}\right) = 0,98 \iff p\left(Z \leqslant \dfrac{0,15}{\sigma_1}\right) = 0,99$

La calculatrice donne alors $\dfrac{0,15}{\sigma_1} \approx 2,326$.

Finalement pour répondre à l'amélioration souhaitée, il faut régler la machine avec $\boxed{\sigma_1 \approx 0,064}$.

2. (a)

On répète $n = 250$ fois, de manière indépendante, un expérience n'ayant que deux issues dont la probabilité de « succès » (le tube n'est pas conforme) est $p = 0,02$. Soit Y la variable aléatoire comptant le nombre de succès, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0,02$.

$n = 250 \geqslant 30$, $np = 5 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 245 \geqslant 5$, on peut donc bâtir l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

$I = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$
$\boxed{= [0,003 ; 0,037]}$ à 10^{-3} près.

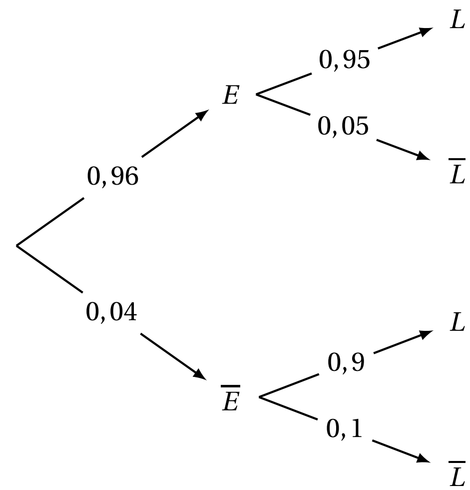
(b)

La fréquence observée de tubes non non « conformes pour la longueur » est
$f = \dfrac{10}{250} = 0,04$.
On a $f \notin I$, on peut donc estimer qu'il faut réviser la machine.

Partie B

1.

D'après l'énoncé $p\left(\overline{E} \cap L\right) = 0,036$ donc
$p_{\overline{E}}(L) = \dfrac{0,036}{0,04} = \boxed{0,9}$.



2.

E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers donc, d'après les probabilités totales on a :
$$\begin{aligned} p(L) &= p(L \cap E) + p\left(L \cap \overline{E}\right) \\ &= p_E(L) \times p(E) + 0,036 \\ &= 0,95 \times 0,96 + 0,036 \\ &= 0,912 + 0,036 \end{aligned}$$
On a donc bien $\boxed{p(L) = 0,948}$.

Exercice 2 — 4 points

Affirmation 1 : FAUSSE

$$\begin{aligned} z - \mathrm{i} = \mathrm{i}(z+1) &\iff z - \mathrm{i}z = 2\mathrm{i} \\ &\iff z = \frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \\ &\iff z = \frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}^2} \\ &\iff z = -1+\mathrm{i} \\ &\iff z = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &\iff z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} \neq \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Affirmation 2 : FAUSSE

$$\begin{aligned} 1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} &= 1 + \left(\cos(2x) + \mathrm{i}\sin(2x)\right) \\ &= 1 + \left(2\cos^2(x) - 1 + 2\mathrm{i}\sin(x)\cos(x)\right) \\ &= 2\cos(x)\left(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\right) \\ &= 2\cos(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \neq 2\cos(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \end{aligned}$$

Affirmation 3 : VRAIE

Soit $A(\mathrm{i})$ et $B(-1)$ alors $|z-\mathrm{i}|=|z+1| \iff AM=BM$

M est donc sur la médiatrice de $[AB]$ or cette médiatrice est d'équation $y=-x$

Affirmation 4 : FAUSSE

$z^5+z-\mathrm{i}+1=0 \iff z^5+z+1=\mathrm{i}$

Si $z\in\mathbb{R}$, $\left(z^5+z+1\right)\in\mathbb{R}$

Alors $z^5+z+1\neq \mathrm{i}$

Exercice 3 — 6 points

Partie A : établir une inégalité

1.

f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$.

$f=u-\ln(v) \Rightarrow f'=u'-\dfrac{v'}{v}$ avec $\begin{cases}u(x)=x\\v(x)=1+x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u'(x)=1\\v'(x)=1\end{cases}$

$\forall x\in[0\,;\,+\infty[$, $f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{x+1}$

Sur $[0\,;\,+\infty[$, $\dfrac{x}{x+1}\geqslant 0$. On en déduit que f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

2.

$\forall x\in[0\,;\,+\infty[$, $f(x)\geqslant f(0)$ car f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

$f(0)=0$ d'où $\forall x\in[0\,;\,+\infty[$, $x-\ln(1+x)\geqslant 0$

On a donc bien $\forall x\in[0\,;\,+\infty[$, $\boxed{\ln(1+x)\leqslant x}$

Partie B : application à l'étude d'une suite

1.

$u_1=u_0-\ln(1+u_0)=1-\ln(2)$

$u_2=u_1-\ln(1+u_1)=1-\ln(2)-\ln(2-\ln(2))\approx 0{,}0392$

2. (a)

Initialisation : $u_0=1\geqslant 0$

Hérédité : Soit n un entier naturel tel que $u_n\geqslant 0$ alors $u_{n+1}=f(u_n)\geqslant 0$ d'après la **partie A**

On en déduit que la propriété est héréditaire à partir du rang 0 or elle est vérifiée à ce même rang.

Par le principe de récurrence on peut donc conclure que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 0$

(b)

$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=-\ln(1+u_n)\leqslant 0$ car $(1+u_n)\geqslant 1$.

On en déduit que (u_n) est décroissante.

(u_n) est donc majorée par $u_0=1$.

Finalement on a bien : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant 1$.

(c)

(u_n) est décroissante et minorée par 0 donc (u_n) **converge** vers $\ell\geqslant 0$.

3.

$\ell=f(\ell) \iff \ln(1+\ell)=0 \iff \boxed{\ell=0}$

4. (a)

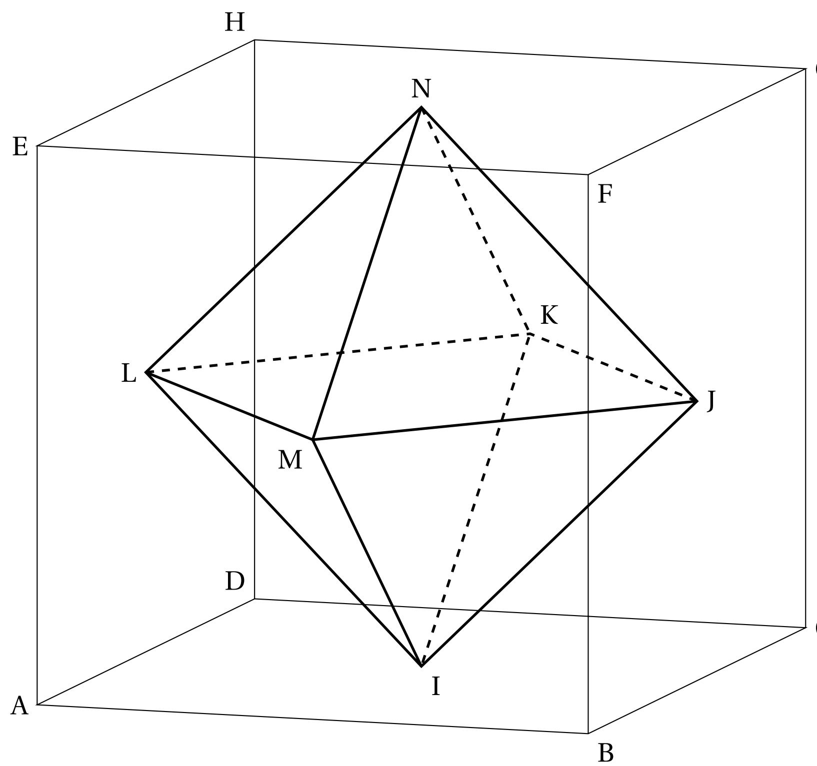
N ← 0
U ← 1
Tant que U $\geqslant 10^{-p}$
    U ← U − ln(1 + U)
    N ← N+1
Fin Tant que
Afficher N

(b)

En programmant l'algorithme, on trouve $n=6$ comme le plus petit entier à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15}

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



1.

L et M sont les milieux respectifs de [AH] et [AF] donc d'après le théorème de la droite des milieux dans AFH, on en déduit que (LM) est parallèle à (FH).

(IN) et (BF) sont parallèles car BFNI est un rectangle or (BF) est perpendiculaire au plan (EFG) donc à la droite (FH).

On a alors (IN) perpendiculaire à (FH) et comme (LM) est parallèle à (FH), on en déduit finalement que (IN) et (ML) sont orthogonales.

1. (a)

Dans $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$ on a

$C(1\,;1\,;0)$, $M\left(\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$ et $L\left(0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$

Donc $\overrightarrow{NC}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\0\end{pmatrix}$.

(b)

Le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$ est orthonormé donc on peut calculer un produit scalaire.

$\overrightarrow{NC}\cdot\overrightarrow{ML}=-0,25+0,25+0=0$

On en déduit que les vecteurs sont orthogonaux donc (NC) et (ML) sont orthogonales.

(c)

(ML) est orthogonale à (NC) et à (IN) qui sont deux droites sécantes du plan (NCI) donc (ML) est perpendiculaire au plan (NCI).

$\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\0\end{pmatrix}$ est donc normal à (NCI) d'où

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est normal à (NCI).

On a alors (NCI) : $x-y+d=0$ or $C\in$ (NCI) d'où $x_C-y_C+d=0\equiv d=0$.

Finalement (NCI) : $x-y=0$.

2. (a)

Dans $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$ on a :

$N\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$, $J\left(1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ et $M\left(\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$

$x_N-y_N+z_N=1$

$x_J-y_J+z_J=1$

$x_N-y_N+z_N=1$

(NJM) a donc bien pour équation cartésienne $x-y+z=1$.

(b)

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal à (NJM) d'après l'équation cartésienne trouvée précédemment. Or $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Finalement, la droite (DF) est perpendiculaire au plan (NJM).

(c)

N appartenant à ces deux plans, la droite cherchée passe par N.

Soit $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de cette droite.

$\overrightarrow{w}$ est orthogonal aux vecteurs normaux des deux plans, on a donc :

$$\begin{cases}\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}=0\\\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{n}=0\end{cases}\iff\begin{cases}a-b=0\\a-b+c=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=b\\c=0\end{cases}$$

En posant $a=b=1$, on en déduit que la droite d'intersection entre les plans (NCI) et (NJM) passe par N et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Il s'agit de la droite (EG) car $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et N est le milieu de [EG].