TS1-TS2 : devoir sur table commun n° 5 (4 heures)

Il faut traiter les exercices I, II, III et l'exercice IV (**en fonction de l'enseignement de spécialité suivi).**

Exercice I

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout n, par $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n$.

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ de l'annexe 2.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. (a) $1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. remarque : $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \left|1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|$

   On a donc $\boxed{1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$.

   (b) On pose $a = 1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

   $z_1 = az_0\left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_0 = a = \boxed{\dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$

   $z_2 = az_1 = a^2 z_0 = a^2 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}\times 2} = \boxed{\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$

2. (a) Soit P_n la propriété « $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$ »

   Effectuons une démonstration par récurrence.

   - Pour $n = 0$: $z_0 = 1$ et $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0\times\frac{\pi}{6}} = 1$; donc P_0 est vraie.
   - On suppose P_p vraie pour $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $z_p = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\frac{\pi}{6}}$

     $z_{p+1} = \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_p = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\frac{\pi}{6}} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{p+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+1)\frac{\pi}{6}}$
   - La propriété est vraie au rang 0 et elle est **héréditaire**.

   D'après l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout n.

   Pour tout entier naturel n, $\boxed{z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}}$.

   (b) Les points O d'affixe 0, et A_0 d'affixe $z_0 = 1$ sont situés sur l'axe des réels ; donc les points O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si le point A_n est sur l'axe des réels, autrement dit si son affixe est réelle, donc si son argument vaut $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   Un argument de z_n est $n\dfrac{\pi}{6}$; on doit donc avoir : $n\dfrac{\pi}{6} = k\pi,\ k \in \mathbb{N}$ ce qui équivaut à $\boxed{n = 6k,\ k \in \mathbb{N}}$.
   Les points O, A_0 et A_n sont alignés si **n est un multiple de 6**.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

   (a) $d_n = |z_{n+1} - z_n|$ donc d_n représente la distance entre les points A_n et A_{n+1} : $\boxed{d_n = A_nA_{n+1}}$

   (b) $d_0 = |z_1 - z_0| = \left|1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3} - 1\right| = \left|\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

(c) Pour tout n, $z_{n+2}-z_{n+1}=azn+1-az_n=a\left(z_{n+1}-z_n\right)=\boxed{\left(1+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(z_{n+1}-z_n\right)}$

(d) On en déduit que :

$d_{n+1}=\left|z_{n+2}-z_{n+1}\right|=\left|\left(1+\imath\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(z_{n+1}-z_n\right)\right|=\left|1+\imath\frac{\sqrt{3}}{3}\right|\times\left|z_{n+1}-z_n\right|=\boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}d_n}$

On sait que $d_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$ donc on peut dire que la suite (d_n) est **géométrique** de premier terme $\boxed{d_0=\frac{\sqrt{3}}{3}}$ et de raison $\boxed{q=\frac{2}{\sqrt{3}}}$.

D'après les propriétés des suites géométriques, $d_n=d_0\times q^n=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n}$ pour tout n.

4. (a) D'après les questions précédentes, pour tout n :

$|z_n|=\left|\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\mathrm{e}^{\imath n\frac{\pi}{6}}\right|=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\times\left|\mathrm{e}^{\imath n\frac{\pi}{6}}\right|=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\times 1=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ donc $|z_n|^2=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$

De même $|z_{n+1}|=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}$ donc

$|z_{n+1}|^2=\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\right)^2=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}=\frac{4}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$

$d_n=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ donc $d_n^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right)^2=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$

$|z_n|^2+d_n^2=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}=\frac{4}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}=|z_{n+1}|^2$ donc $\boxed{|z_n|^2+d_n^2=|z_{n+1}|^2}$

(b) On sait que $|z_{n+1}|=OA_{n+1}$, que $|z_n|=OA_n$ et que $d_n=A_nA_{n+1}$

Donc $|z_{n+1}|^2=|z_n|^2+d_n^2$ équivaut à $OA_{n+1}^2=OA_n^2+A_nA_{n+1}^2$

D'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

(c) Voir construction de A_5 en annexe (on remarque que l'on n'a pas droit à l'équerre!).

(d)
- Le triangle OA_4A_5 est rectangle en A_4 donc le point A_5 est sur la droite d perpendiculaire à (OA_4) passant par A_4. On trace cette perpendiculaire d comme médiatrice du segment ayant pour extrémités deux points i et j de la droite (OA_4) symétriques autour de A_4. (voir la figure)
- z_5 a pour argument $\frac{5\pi}{6}$ et z_3 a pour argument $\frac{3\pi}{6}$; donc l'angle $\left(\overrightarrow{OA_3},\overrightarrow{OA_5}\right)$ a pour mesure $\frac{\pi}{3}$. On trace donc le triangle équilatéral direct OA_3A_3' et le point A_5 appartient à (OA_3').

Le point A_5 est à l'intersection des droites d et (OA_3').

On peut également construire ce point A_5 à l'intersection de la droite (OA_3') et du cercle de diamètre $[\mathrm{O}A_6]$.

Exercice II

1. (a) Montrons par récurrence que $u_n<1$ pour tout n.
- $u_0=0<1$ donc la propriété est vraie pour $n=0$.
- Supposons que $u_n<1$ pour un entier n.

  Alors : $u_n<1\Rightarrow -u_n>-1\Rightarrow 2-u_n>1\Rightarrow\frac{1}{2-u_n}<1$ (car la fonction inverse est décroissante sir $]0\,;\,+\infty[$), donc $u_{n+1}<1$.

  La propriété est héréditaire

D'après l'axiome de récurrence, $u_n<1$ pour tout n.

Comme $u_n<1$ pour tout n, les termes sont tous définis (dénominateurs jamais nuls).

(b) On a $u_0 = \boxed{0}$, $u_1 = \boxed{\dfrac{1}{2}}$, $u_2 = \dfrac{1}{2-\frac{1}{2}} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$ et $u_3 = \dfrac{1}{2-\frac{2}{3}} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$.

(c) On a de façon évidente : $\boxed{w_0 = u_0}$, $\boxed{w_1 = u_1}$ $\boxed{w_2 = u_2}$ et $\boxed{w_3 = u_3}$.

(d) Par définition : $w_n = \dfrac{n}{n+1}$. Pour tout n, $\dfrac{1}{2-w_n} = \dfrac{1}{2-\frac{n}{n+1}} = \dfrac{1}{\frac{2(n+1)-n}{n+1}} = \dfrac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = \dfrac{n+1}{n+2} = w_{n+1}$, donc la suite (w_n) suit la même relation de récurrence que la suite (u_n).

(e) Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = w_n$.

- **Initialisation** : $w_0 = 0 = u_0$.
- **Hérédité** : On suppose que pour $n > 0$, $u_n = w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

  On a par définition : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} = \dfrac{1}{2-w_n} = w_{n+1}$ donc $u_{n+1} = w_{n+-1}$.

On a montré par récurrence que pour tout naturel n, $u_n = w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2. La suite définie par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ est définie pour $n > 0$.

(a) On calcule la somme : $v_1 + v_2 + v_3 = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \ln\dfrac{3}{4} = \ln\dfrac{1\times 2\times 3}{2\times 3\times 4} = \ln\dfrac{1}{4} = \boxed{-\ln 4}$.

(b) On calcule de même

$$_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \cdots + \ln\frac{n}{n+1} = \ln\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}{2\times 3\times\cdots\times n\times(n+1)} = \ln\frac{1}{n+1} = \boxed{-\ln(n+1).}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty}.$$

Exercice III

Partie A :

1. Soient n et p deux naturels distincts.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = \dfrac{1}{2}$ donc le point $\mathrm{A}\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$.

On peut même montrer que c'est le seul point commun :

$f_n(x) = f_p(x) \iff \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-px}}{1+\mathrm{e}^{-x}} \iff \mathrm{e}^{-nx} = \mathrm{e}^{-px}$ (car $1+\mathrm{e}^{-x} > 0$) $\iff -nx = -px \iff x = 0$ (car$n \neq p$). (car par croissance de la fonction exp, $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a = b$)

Toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ contiennent le point $A\left(0\,,\,\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Étude de la fonction f_0, seul point commun à toutes les courbes.

(a) $f_0(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_0'(x) = -\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} = \boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}}$. On a utilisé la formule $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1+\mathrm{e}^{-x}$.

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2 >$, on en déduit que $\boxed{f_0'(x) > 0}$.

La fonction f_0 est donc **croissante** sur $\mathbb{R}$.

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{X} + \infty$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = 0}$.

Ceci signifie que l'axe des abscisses est **asymptote** à la courbe $\mathscr{C}_0$ au voisinage de $-\infty$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = 1}$.

Ceci signifie que la droite d'équation $y = 1$ est **asymptote horizontale** à la courbe $\mathscr{C}_0$ au voisinage de $+\infty$.

(c) Tableau très simple : sur $\mathbb{R}$, f_0 croît de 0 à 1.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	
$f_0(x)$	0	$\nearrow$	1

3. Étude de la fonction f_1

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(-x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1}{e^{-x}+1} = \boxed{f_0(x)}$ en multipliant chaque terme par le facteur non nul e^{-x}.

(b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = 1$
De même $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = 0$.
Comme $f_0(x) = f_1(-x)$, f_0 fonction croissante est la composée de f_1 et de la fonction $x \longmapsto -x$ qui est décroissante. Il en résulte que f_1 est décroissante sur $\mathbb{R}$.
On peut aussi remarquer que $f_1(x) = f_0(-x)$, donc $f_1'(x) = -f_0(x) < 0$.

(c) $f_0(x) = f_1(-x)$ signifie que deux points d'abscisses x et $-x$ de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ ont la même ordonnée : ces points sont symétriques par rapport à $(\mathrm{O}y)$.
$\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ sont **symétriques** par rapport de l'axe des ordonnées.

4. Étude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$

(a) $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$. En multipliant chaque terme par $e^{nx} > 0$, $f_n(x) = \boxed{\dfrac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}}}$.

(b) Pour $p \geqslant 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{px} = +\infty$, donc en utilisant l'écriture du **a.**, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0}$.

Limite en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{nx} = 0_+$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{(n-1)x} = 0_+$ donc par limite de l'inverse $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = +\infty}$

(c) f_n quotient de sommes de fonctions dérivables est dérivable car $e^{nx} + e^{(n-1)x} > 0$.
En utilisant l'écriture trouvée au début de la question :

$$\boxed{f_n'(x) = -\frac{ne^{nx} + (n-1)e^{(n-1)x}}{\left(e^{nx}+e^{(n-1)x}\right)^2}}.$$

Comme $n \geqslant 2$, cette dérivée est négative quel que soit x réel. Les fonctions $(f_n,\ n \geqslant 2)$ sont donc décroissantes de $+\infty$ à 0.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_n'(s)$		$-$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

Exercice IV

Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité

Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation

$$\frac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \frac{1}{2}mz - 3 = 0.$$

1. Le point $A(1;1;1)$ appartient au plan P_m si et seulement si $\frac{1}{4}m^2x_A+(m-1)y_A+\frac{1}{2}mz_A-3=0$
$\iff \frac{1}{4}m^2+(m-1)+\frac{1}{2}m-3=0 \iff \frac{1}{4}m^2+\frac{3}{2}m-4=0 \iff \boxed{m^2+6m-16=0}$
$\Delta=36+64=100$ donc cette équation admet deux solutions $m'=\frac{-6+10}{2}=2$ et $m''=\frac{-6-10}{2}=-8$.
Le point A appartient au plan P_m pour $\boxed{m=2}$ ou $\boxed{m=-8}$.

2. Le plan P_1 a pour équation $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}z-3=0$ ou encore $x+2z-12=0$.
Le plan P_{-4} a pour équation $4x-5y-2z-3=0$.
On cherche l'intersection de ces deux plans :
$$\begin{cases} x+2z-12 &= 0\\ 4x-5y-2z-3 &= 0\end{cases} \iff \begin{cases} x &= 12-2z\\ -5y &= -4(12-2z)+2z+3\end{cases} \iff \begin{cases} x &= 12-2z\\ -5y &= -48+8z+2z+3\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x &= 12-2z\\ -5y &= -45+10z\end{cases} \iff \begin{cases} x &= 12-2z\\ y &= 9-2z\end{cases}$$
En posant $z=t$, on peut dire que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique
$$\boxed{\begin{cases} x &= 12-2t\\ y &= 9-2t \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}\\ z &= t\end{cases}}$$

3. (a) Le plan P_0 a pour équation $-y-3=0$.
Pour déterminer l'intersection du plan P_0 et de la droite (d), on résout le système :
$$\begin{cases} x &= 12-2t\\ y &= 9-2t\\ z &= t\\ -y-3 &= 0\end{cases} \iff \begin{cases} x &= 12-2t\\ -3 &= 9-2t\\ z &= t\\ y &= -3\end{cases} \iff \begin{cases} x &= 12-2t\\ t &= 6\\ z &= t\\ y &= -3\end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0\\ y &= -3\\ z &= 6\\ t &= 6\end{cases}$$
L'intersection du plan P_0 et de la droite (d) est donc le point $\boxed{B\,(0;-3;6)}$.

(b) Le plan P_m a pour équation $\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0$.
On regarde si les coordonnées du point B vérifient l'équation du plan P_m :
$\frac{1}{4}m^2x_B+(m-1)y_B+\frac{1}{2}mz_B-3=0+(m-1)(-3)+\frac{1}{2}m\times6-3=-3m+3+3m-3=0$
Donc le point **B appartient au plan $\mathbf{P_m}$**, quelle que soit la valeur du réel m.

(c) Soit $H(a;b;c)$ un point qui appartient au plan P_m pour tout réel m.
Cela signifie que les coordonnées du point H vérifient l'équation du plan pour tout réel m :
$\frac{1}{4}m^2a+(m-1)b+\frac{1}{2}mc-3=0$
On donne à m des valeurs particulières :
- Pour $m=0$, on obtient $-b-3=0$ donc $b=-3$.
- Pour $m=2$, on obtient $a+(2-1)(-3)+c-3=0$, soit $a+c=6$.
- Pour $m=-2$, on obtient $a+(-2-1)(-3)-c-3=0$, soit $a-c=-6$.

On résout le système $\begin{cases} a+c &= 6\\ a-c &= -6\end{cases} \iff \begin{cases} 2a &= 0\\ a+c &= 6\end{cases} \iff \begin{cases} a &= 0\\ c &= 6\end{cases}$
Le point H a donc pour coordonnées $(0;-3;6)$ donc c'est le point B.
Le point B est l'unique point appartenant à tous les plans P_m quelle que soit la valeur de m.

4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que
$$-10\leqslant m\leqslant 10 \text{ et } -10\leqslant m'\leqslant 10$$
On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

(a) Le plan P_1 a pour équation $x+2z-12=0$ donc a pour vecteur normal $\vec{n}_1\,(1;0;2)$.
Le plan P_{-4} a pour équation $4x-5y-2z-3=0$ donc a pour vecteur normal $\vec{n}_{-4}\,(4;-5;-2)$.
$\vec{n}_1.\vec{n}_{-4}=1\times4+0+2\times(-2)\boxed{=0}$ donc les vecteurs sont **orthogonaux**.
Les plans P_1 et P_{-4} sont donc **perpendiculaires**.

(b) Le plan P_m a pour équation $\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0$ donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\left(\frac{1}{4}m^2\,;\,m-1\,;\,\frac{1}{2}m\right)$.

Le plan $P_{m'}$ a pour équation $\frac{1}{4}m'^2x+(m'-1)y+\frac{1}{2}m'z-3=0$ donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}'\left(\frac{1}{4}m'^2\,;\,m'-1\,;\,\frac{1}{2}m'\right)$.

les deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux :

$P_m\perp P_{m'} \iff \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{n}' \iff \overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}'=0 \iff \frac{1}{4}m\times\frac{1}{4}m'+(m-1)(m'-1)+\frac{1}{2}m\times\frac{1}{2}m'=0$

$\iff \boxed{\left(\frac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)\left(m'-1\right)+\frac{mm'}{4}=0}$.

Remarque : cette égalité se transforme, en multipliant par 16, en :

$$\left(mm'\right)^2+16(m-1)\left(m'-1\right)+4mm'=0$$

(c) On donne l'algorithme suivant :

Variables :	m et m' entiers relatifs
Traitement :	Pour m allant de -10 à 10 :
	Pour m' allant de -10 à 10 :
	Si $\left(mm'\right)^2+16(m-1)\left(m'-1\right)+4mm'=0$
	Alors Afficher $\left(m\,;\,m'\right)$
	Fin du Pour
	Fin du Pour

Cet algorithme affiche tous les couples $(m\,;\,m')$ d'entiers compris entre -10 et 10 pour lesquels $\left(\frac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)\left(m'-1\right)+\frac{mm'}{4}=0$, c'est-à-dire pour lesquels les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

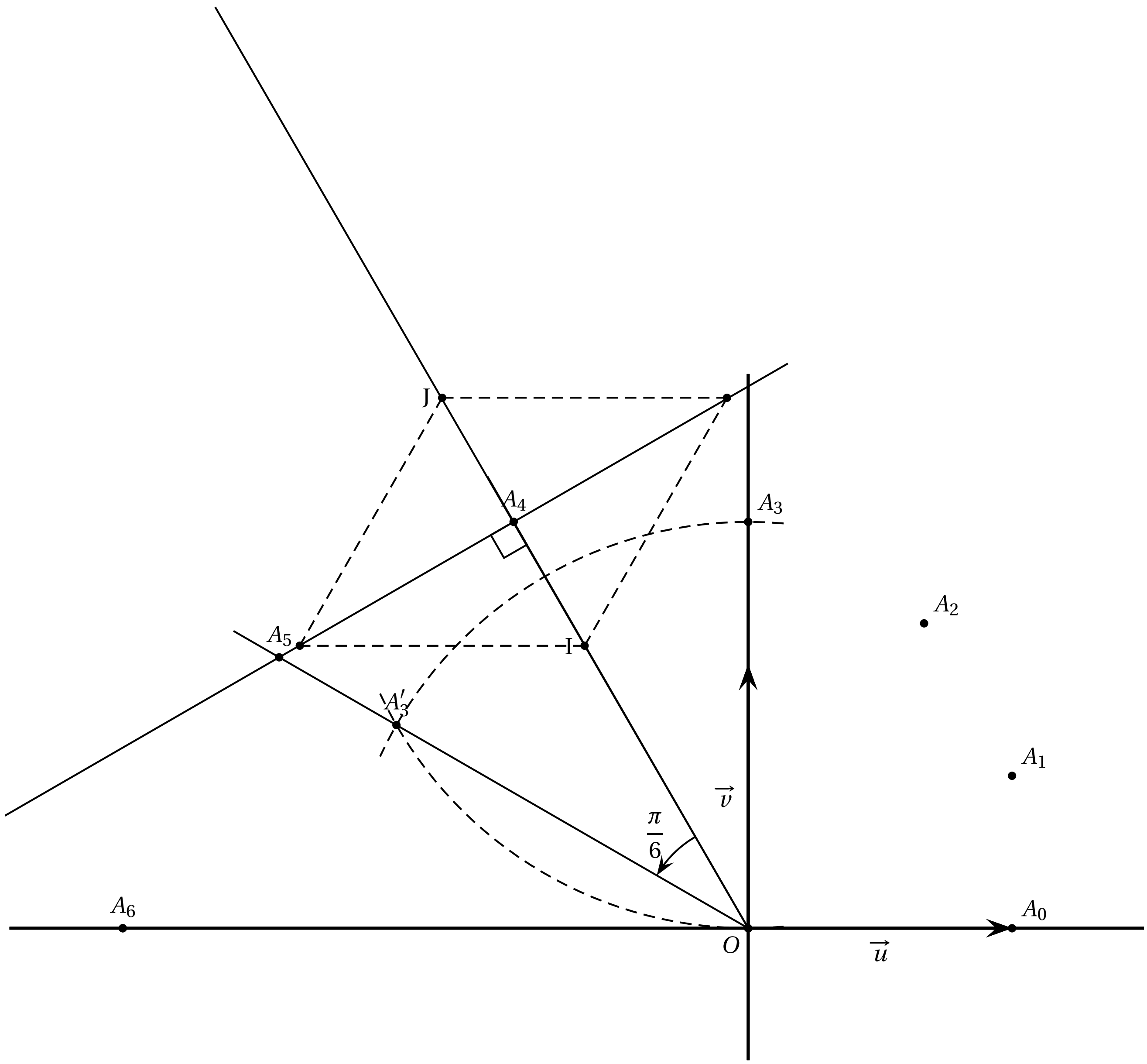
(d) Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4\,;\,1)$, $(0\,;\,1)$ et $(5\,;\,-4)$.

Le nombres m et m' **jouant le même rôle** (symétrie entre m et m') , les autres couples sont $(1\,;\,-4)$, $(1\,;\,0)$ et $(-4\,;\,5)$.

Les six couples seront affichés dans cet ordre :

$$\boxed{(-4\,;\,1)\,;\,(-4\,;\,5)\,;\,(0\,;\,1)\,;\,(1\,;\,-4)\,;\,(1\,;\,0)\,;\,(5\,;\,-4)}$$

ANNEXE DE L'Exercice I



Exercice IV (spécialité)

Partie A

1. On obtient à l'aide de la calculatrice :
$$M^2=\begin{pmatrix}6&2&3\\4&4&1\\10&4&7\end{pmatrix}$$

2. $M^2+8M+6I$
$$=\begin{pmatrix}6&2&3\\4&4&1\\10&4&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8&8&8\\8&-8&8\\32&16&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}20&10&11\\12&2&9\\12&20&21\end{pmatrix}=M^3.$$
Ainsi a-t-on :
$M^3=M2+8M+6I \Leftrightarrow M^3–M^2–8M=6I$
$\Leftrightarrow M\left(M^2–M–8I\right)=6I$
$\Leftrightarrow M\times\dfrac{1}{6}\left(M^2–M–8I\right)=I$
Ainsi M est inversible d'inverse $\boxed{M^{-1}=\dfrac{1}{6}\left(M^2–M–8I\right)}$.

Partie B Etude d'un cas particulier

1. Les points A, B et C appartiennent à la parabole. Leurs coordonnées vérifient donc l'équation $y=ax^2+bx+c$.
On obtient ainsi : $\begin{cases}a+b+c=1a–b+c=1\\a-b+c=-1\\4a+2b+c=5\end{cases}\Leftrightarrow$
$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\4&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$$

2. Ainsi a-t-on :
$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$$
$=\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}$ et l'on obtient bien des nombres entiers.

Partie C Retour au cas général

1. $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{1}{2}p+\frac{1}{6}q+\frac{1}{3}r=a\\\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q=b\\p+\frac{1}{3}q-\frac{1}{3}r=c\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3p+q+2e=6a\\3p-3q=6b\\6p+2q-2r=c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3p+q+2e\equiv 0\ [6]\\3p-3q\equiv 0\ [6]\\6p+2q-2r\equiv 0\ [6]\end{cases}$$

2. On considère l'équation $3p–3q\equiv 0\ [6]$
$3p–3q\equiv 0\ [6]\Leftrightarrow 3(p–q)\equiv 0\ [6]$.
Puisque $3(p-q)$ est un multiple de 6, cela signifie que $p-q$ est un multiple de 2 et par conséquent $\boxed{p-q\equiv 0\ [2]}$.
Si, à partir du système précédent, on effectue le calcul $2L_1+L_3$ on obtient :
$4q+2r\equiv 0\ [6]\Leftrightarrow 2(2q+r)\equiv 0\ [6]$ Par conséquent $2q+r\equiv 0\ [3]$ or $2\equiv -1\ [3]$.
Ainsi a-t-on $-q+r\equiv 0\ [3]$ soit $\boxed{q-r\equiv 0\ [3]}$
Par conséquent : $\boxed{\begin{cases}q-r\equiv 0\ [3]\\p-q\equiv 0\ [2]\end{cases}}$

3. (a) A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\q\\-p\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\r\\-p\end{pmatrix}$.
Ces deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si :
$-2(r-p)=q-p\Leftrightarrow -2r+2p=q-p$
$\Leftrightarrow\boxed{2r+q-3p=0}$
(b) Puisque $p=7$ et que $p–q\equiv 0\ [2]$ cela signifie qu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $q=7+2k$.
Puisque $q–r\equiv 0\ [3]$ alors il existe $k'\in\mathbb{Z}$ tel que $r=q+3k'=7+2k+3k'$.
Il ne faut pas que $2r+q–3p=0\Leftrightarrow 14+4k+6k'+7+2k–21=0\Leftrightarrow 6(k+k')=0$
$\Leftrightarrow\boxed{k'=-k}$.
Prenons par exemple $k=1$ et $k'=1$.
On obtient ainsi $q=9$, $r=12$.
En utilisant $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$, on trouve :
$$\boxed{a=2\qquad b=-1\qquad c=6}$$