Correction des exercices du stage de révision

I Amérique du Nord juin 2001 (4 points)

On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

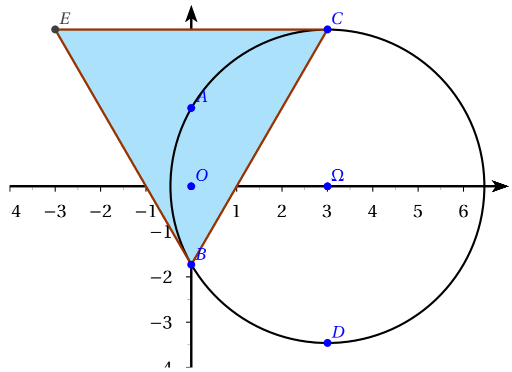
1. $P\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4 - 6\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3 + 24\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 - 18 \times \mathrm{i}\sqrt{3} + 63 = 9 - 18\mathrm{i}\sqrt{3} + -72 + 18\mathrm{i}\sqrt{3} + 63 = 0$ donc
   $\boxed{P(\mathrm{i}\sqrt{3}) = 0}$
   De même : $\boxed{P(-\mathrm{i}\sqrt{3}) = 0}$.

   On cherche a, b et c réels tels que
   $P(z) = \left(z^2 + 3\right)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   On développe puis on identifie les coefficients.
   On obtient $\left(z^2 + 3\right)\left(az^2 + bz + c\right)$
   $= az^4 + bz^3 + (3a + b)z^2 + 3bz + 3c$.
   En identifiant les coefficients, on obtient le système : $\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -6 \\ 3a + c = 21 \\ 3b = -18 \\ 3c = 63 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 21 \end{array}\right.$.
   On en déduit $\boxed{P(z) = \left(z^2 + 3\right)\left(z^2 - 6z + 21\right)}$.

2. On résout l'équation $P(z) = 0$, en appliquant le théorème du produit nul.
   On trouve $\boxed{\mathscr{S} = \{-\mathrm{i}\sqrt{3}\,;\, \mathrm{i}\sqrt{3}\,;\, 3 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}\,;\, 3 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}\}}$.
   Remarque : on trouve les affixes des points A, B C et D des questions suivantes.

3. Par symétrie, on devine que le centre du cercle appartient à l'axe des réels et est le milieu de [CD], donc le point d'affixe 3.
   Il reste à montrer que les quatre points appartiennent au cercle de centre $\Omega(3)$ et de rayon $2\sqrt{3}$.
   $\Omega C = |z_C - z_\Omega| = \left|2\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \boxed{2\sqrt{3}}$.
   $\boxed{\Omega D = 2\sqrt{3}}$ par symétrie par rapport à lace des réels.
   $\Omega A = |_A - z_\Omega| = \left|\mathrm{i}\sqrt{3} - 3\right| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = \boxed{2\sqrt{3}}$.
   $\boxed{\Omega B = \Omega A}$ par symétrie par rapport à l'axe des réels.
   A, B, C et D appartenant donc bien au cercle de centre Ω et de rayon $2\sqrt{3}$ (points cocycliques).

4. E est le symétrique de D par rapport à O, donc $z_E = -z_D = -3 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$.
   $\dfrac{z_\mathrm{E} - z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}} = \dfrac{-3 + 3\mathrm{i}\sqrt{3}}{3 + 3\sqrt{3}\mathrm{i}} = \dfrac{3(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})}{3(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})} = \dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})}{1^2 + \sqrt{3}^2} = \dfrac{2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$.
   L'angle $\left(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BE}\right)$ est $\arg\left(\dfrac{z_\mathrm{E} - z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
   $\left|\dfrac{z_\mathrm{E} - z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}}\right| = \dfrac{BE}{BC} = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ donc BE = BC.
   BEC est un triangle isocèle avec un angle au sommet valant $\dfrac{\pi}{3}$ donc ce triangle est un **triangle équilatéral**.



II Réunion juin 2007 (4 points)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$: la suite est donc croissante.
2. (a) $h(x) = x^2 + x$; h est dérivable et $h'(x) = 2x + 1$.
   Sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$, $h'(x) < 0 \Rightarrow h$ est décroissante ;
   Sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, $h'(x) > 0 \Rightarrow h$ est croissante.
   $h'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$. La fonction admet en ce point un extremum qui est un minimum $h\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$.
   Sur $\left]-1\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$ la fonction décroit de 0 à $-\dfrac{1}{4}$ et sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,0\right[$, la fonction croit de $-\dfrac{1}{4}$ à 0.
   Conclusion : si $x \in]-1\,;\,0[$, alors $-1 < -\dfrac{1}{4} < h(x) < 0$.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	0 ↘	$-\frac{1}{4}$	↗ 0

   (b) Par récurrence :
   — Initialisation $-1 < a = u_0 < 0$.
   — Hérédité : supposons que pour un entier naturel n quelconque, $-1 < u_n < 0$.
   D'après la question précédente si $u_n \in [-1\,;\,0[$, alors $u_{n+1} = h(u_n)$ appartient aussi à cet intervalle
   Conclusion : on a montré par récurrence que pour tout naturel n, $-1 < u_n < 0$.
3. La suite u est croissante et majorée par 0 : elle est donc convergente et sa limite ℓ est telle que $\ell \leqslant 0$.
   Or la fonction h, dérivable est continue : la relation $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ donne à la limite $\ell = \ell^2 + \ell \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0$. (par unicité de la limite).
   Conclusion : $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$

III Nouvelle-Calédonie novembre 2012

Partie A

1. $z^2-2z+2=0 \iff (z-1)^2-1+2=0 \iff (z-1)^2+1=0 \iff (z-1)^2-\mathrm{i}^2=0 \iff (z-1+\mathrm{i})(z-1-\mathrm{i})=0 \iff \left\{\begin{array}{l} z-1+\mathrm{i}=0 \text{ ou} \\ z-1-\mathrm{i}=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z=1-\mathrm{i} \text{ ou} \\ z=1+\mathrm{i} \end{array}\right.$.
2. Soit M_1 d'affixe $z_1=1-\mathrm{i}$. On a $\mathrm{A}M_1=|z_1-z_\mathrm{A}|=|1-\mathrm{i}-1|=|-\mathrm{i}|=1$.

   De même $\mathrm{A}M_2=|z_2-z_\mathrm{A}|=|1+\mathrm{i}-1|=|\mathrm{i}|=1$. Ces deux résultats signifient que M_1 et M_2 appartiennent au cercle de centre A et de rayon 1 soit au cercle $\mathscr{C}$.

Partie B

1. Voir à la fin de l'écercice.
2. $z'=\dfrac{2z-1}{2z-2} \Rightarrow z'-1=\dfrac{2z-1}{2z-2}-1 \iff z'-1=\dfrac{2z-1-2z+2}{2z-2} \iff z"-1=\dfrac{1}{2(z-1)}$

   $\iff \boxed{\left(z'-1\right)(z-1)=\dfrac{1}{2}}$.
3. Le résultat précédent entraîne :
   - en termes de modules : $\boxed{\mathrm{A}M\times\mathrm{A}M'=\dfrac{1}{2}}$;
   - le produit des deux complexes étant non nul aucun des deux facteurs ne peut l'être, et en particulier $z'-1\neq0 \iff z'\neq1$, soit $M'\neq\mathrm{A}$;
   - en termes d'argument : $\arg\left[\left(z'-1\right)(z-1)\right]=0+2k\pi$. Or $\arg\left[\left(z'-1\right)(z-1)\right]=\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right)+\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{A}M'}\right)$, donc $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right)+\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{A}M'}\right)=0+2k\pi$, où k est un entier relatif.
4. On a $z_\mathrm{P}=1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \iff z_\mathrm{P}-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \Rightarrow |z_\mathrm{P}-1|=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right| \iff |z_\mathrm{P}-1|=1$.

   Cette dernière égalité montre que P appartient au cercle de centre A et de rayon 1, donc au cercle $\mathscr{C}$.

   Il ne reste plus qu'à construire sur ce cercle le point tel que $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.
5. On a $\mathrm{AP}\times\mathrm{AP}'=\dfrac{1}{2}$; or $\mathrm{AP}=1$, donc $\mathrm{AP}'=\dfrac{1}{2}$.le point P′ appartient au cercle $\mathscr{C}_1$ de centre A et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

   D'autre part on a $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{AP}'}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$.

   On peut donc construire P_1 symétrique sur le cercle $\mathscr{C}$ du point P autour de l'axe horizontal contenant A. Le point P′ est le point commun à $[\mathrm{AP}_1]$ et au cercle $\mathscr{C}_1$. Voir plus bas.
6. (a) On a donc $z=\dfrac{3}{4}+\alpha\mathrm{i}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$. D'où :

   $$z'=\frac{2(\frac{3}{4}+\alpha\mathrm{i})-1}{2(\frac{3}{4}+\alpha\mathrm{i})-2}=\frac{\frac{3}{2}+2\alpha\mathrm{i}-1}{\frac{3}{2}+2\alpha\mathrm{i}-2}=\frac{\frac{1}{2}+2\alpha\mathrm{i}}{-\frac{1}{2}+2\alpha\mathrm{i}}=\frac{\left(\frac{1}{2}+2\alpha\mathrm{i}\right)\left(-\frac{1}{2}-2\alpha\mathrm{i}\right)}{\left(-\frac{1}{2}+2\alpha\mathrm{i}\right)\left(-\frac{1}{2}-2\alpha\mathrm{i}\right)}$$
   $$=\frac{-\frac{1}{4}-\alpha\mathrm{i}-\alpha\mathrm{i}+4\alpha^2}{\frac{1}{4}+4\alpha^2}=\frac{-\frac{1}{4}-2\alpha\mathrm{i}+4\alpha^2}{\frac{1}{4}+4\alpha^2}.$$

   D'où $\left|z'\right|^2=\dfrac{\left(-\frac{1}{4}+4\alpha^2\right)^2}{\left(\frac{1}{4}+4\alpha^2\right)^2}+\dfrac{4\alpha^2}{\left(\frac{1}{4}+4\alpha^2\right)^2}=\dfrac{\frac{1}{16}+16\alpha^4-2\alpha^2+4\alpha^2}{\left(\frac{1}{4}+4\alpha^2\right)^2}=\dfrac{\frac{1}{16}+16\alpha^4+2\alpha^2}{\left(\frac{1}{4}+4\alpha^2\right)^2}=\dfrac{\left(\frac{1}{4}+4\alpha^2\right)^2}{\left(\frac{1}{4}+4\alpha^2\right)^2}=1$. D'où $\left|z'\right|=1$: le point $M"$ appartient au cercle $\mathscr{C}'$ de centre O de rayon 1.

   (b) Un point M' de $\mathscr{C}'$ a une affixe qui peut s'écrire $z'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$ avec $a\in\mathbb{R}$. Son ou ses antécédents par f vérifient :

   $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}=\dfrac{2z-1}{2z-2} \iff 2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}=2z-1 \iff 2z\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-1\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-1 \iff z=\dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-1}$ si $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-1\neq0$.

   Or $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-1=0 \iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}=1 \iff a=0 \iff z=1$. C'est le point A et on sait que ce point n'a pas d'image par f. La réponse est : non.

IV Polynésie septembre 2010

Partie 1

1. On a $g(x)=\mathrm{e}^x(1-x)+1$.

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$, donc par produit des limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.
2. La fonction g, somme de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$, est dérivable et sur $[0\ ;\ +\infty[$:

   $g'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x=-x\mathrm{e}^x$.

   Comme $\mathrm{e}^x>0$ et $x>0$, on a $g'(x)<0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   g est donc décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ de $g(0)=2$ à $-\infty$.
3. Donner le tableau de variations de g.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	2 $\searrow$ $-\infty$

4. (a) Sur $[0\ ;\ +\infty[$, g dérivable est donc continue, $g(0)>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un réel $\alpha\in[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$. Comme g est décroissante, cette solution est unique.

   (b) La calculatrice donne :
   - $g(1)=1$ et $g(2)\approx-6,4$, donc $1<\alpha<2$;
   - $g(1,2)\approx0,3$ et $g(1,3)\approx-0,1$, donc $1,2<\alpha<1,3$;
   - $g(1,27)\approx0,04$ et $g(1,28)\approx-0,007$, donc $1,27<\alpha<1,28$.

   (c) On a $g(\alpha)=0 \iff \mathrm{e}^\alpha-\alpha\mathrm{e}^\alpha+1=0 \iff \mathrm{e}^\alpha(1-\alpha)=-1 \iff \mathrm{e}^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$.
5. On a donc :

x	0 $\quad\alpha\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$ $\;0\;$ $-$

Partie 2

1. La fonction A quotient de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$ (le dénominateur ne s'annulant pas) est dérivable et sur cet intervalle :

$$A'(x)=\frac{4\left(\mathrm{e}^x+1\right)-4x\times\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}=\frac{4\left(\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x+1\right)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}=\boxed{\frac{4g(x)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}}.$$

Comme $\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2>0$ quel que soit x, le signe de $A'(x)$ est celui de $g(x)$.

D'après la précédente question on a donc :

$A'(x)>0$ sur $[0\ ;\ \alpha[$;

$A'(\alpha)=0$;

$A'<0$ sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$.

2. On a donc :

A est croissante sur $[0\ ;\ \alpha[$ et décroissante sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$, $A(\alpha)$ étant le maximum de la fonction.

Partie 3

1. On sait que $x\geqslant 0$, donc l'aire du rectangle OPMQ est égale à $x\times f(x)=\dfrac{4x}{\mathrm{e}^x+1}=A(x)$.

Or on a vu que la fonction présente un maximum pour $x=\alpha$.

2. Le coefficient directeur de la droite (PQ) est égal à $-\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=-\dfrac{\frac{4}{\mathrm{e}^\alpha+1}}{\alpha}=-\dfrac{4}{\alpha\left(\mathrm{e}^\alpha+1\right)}$.

Or on a vu que $\mathrm{e}^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$, donc le coefficient directeur est égal à :

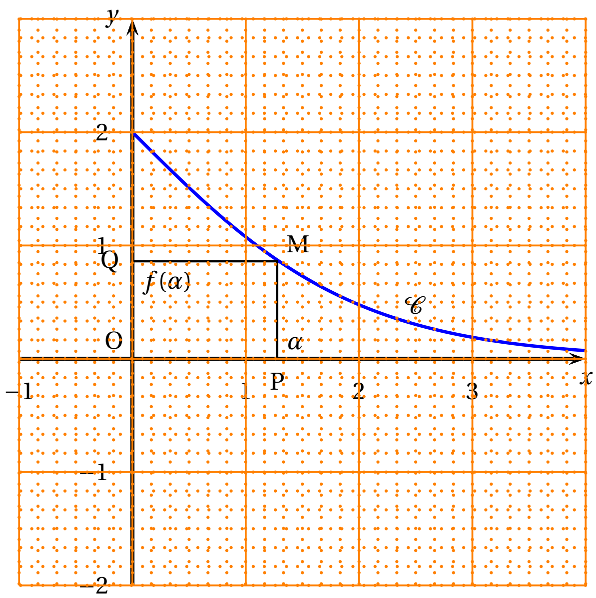
$$-\frac{4}{\alpha\left(\mathrm{e}^\alpha+1\right)}=-\frac{4}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)}=-\frac{4(\alpha-1)}{\alpha(1+\alpha-1)}=-\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}.$$

La tangente en $M(\alpha\ ;\ f(\alpha))$ a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.

Or $f'(x)=-\dfrac{4\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}$, donc

$$f'(\alpha)=-\frac{4\mathrm{e}^\alpha}{\left(\mathrm{e}^\alpha+1\right)^2}=-\frac{\frac{4}{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)^2}=-\frac{4(\alpha-1)}{(1+\alpha-1)^2}=-\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}.$$

Les coefficients directeurs sont égaux : les droites sont **parallèles**.



V Métropole septembre 2010

1. (a) En partant du point $((u_0=5\ ;\ 0)$ et en allant alternativement verticalement vers la courbe $\mathscr{C}$ et horizontalement vers la droite Δ, on obtient les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses, $u_1,\ u_2,\ u_3$ etc. Voir la figure

(b) Au vu des premiers termes il semble que la suite soit décroissante vers l'abscisse du point commun à $\mathscr{C}$ et à Δ soit vers 1.

2. (a) • Initialisation : on a $u_0-1=5-1=4>0$: vrai.

• Hérédité : supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $u_n-1>0$.

Or $u_{n+1}=\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}$ donc, pour tout n, $u_{n+1}-1=\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}-1=\dfrac{4u_n-1-u_n-2}{u_n+2}=\dfrac{3u_n-3}{u_n+2}=\dfrac{3\left(u_n-1\right)}{u_n+2}$.

On sait que $u_n-1>0$, donc $u_n>1$ et $u_n+2>3>0$.

Tous les termes de $u_{n+1}-1$ sont supérieurs à zéro, donc finalement $u_{n+1}-1>0$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n-1>0$.

(b) • Décroissance de la suite :

Pour tout n, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}-u_n=\dfrac{4u_n-1-u_n^2-2u_n}{u_n+2}=\dfrac{-u_n^2+2u_n-1}{u_n+2}=-\dfrac{u_n^2-2u_n+1}{u_n+2}=\boxed{-\dfrac{\left(u_n-1\right)^2}{u_n+2}}$.

Les deux termes du quotients sont positifs, donc finalement $u_{n+1}-u_n<0$ ce qui démontre que la suite $\left(u_n\right)$ est **décroissante**.

Or $u_n-1>0\iff u_n>1$ La suite étant minorée par 1 et décroissante converge vers une limite $\ell\geqslant 1$ et par continuité de la fonction f, on a $\ell=\dfrac{4\ell-1}{\ell+2}$ équation dont la seule solution est $\ell=1$.

La suite $\left(u_n\right)$ converge vers 1.

3. (a) On a $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{u_{n+1}-1}-\dfrac{1}{u_n-1}$.

Or on a vu ci-dessus (démonstration par récurrence) que $u_{n+1}-1=\dfrac{3\left(u_n-1\right)}{u_n+2}$, donc, pour tout n,

$v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n+2}{3\left(u_n-1\right)}-\dfrac{1}{u_n-1}=\dfrac{u_n+2-3}{3\left(u_n-1\right)}=\dfrac{u_n-1}{3\left(u_n-1\right)}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$, car on a vu que $u_n-1>0$.

Ceci montre que la suite $\left(v_n\right)$ est une suite **arithmétique** de raison $\dfrac{1}{3}$, de premier terme $v_0=\dfrac{1}{u_0-1}=\dfrac{1}{5-1}=\dfrac{1}{4}$.

(b) Pour tout n, $v_n=v_0+n\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\times n=\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{3}=\dfrac{3+4n}{12}$.

Or $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}\iff u_n-1=\dfrac{1}{v_n}\iff u_n=\dfrac{1}{v_n}+1=\dfrac{12}{3+4n}+1=\dfrac{12+3+4n}{3+4n}=\dfrac{15+4n}{3+4n}$, quel que soit $n\in\mathbb{N}$.

On retrouve ici que les termes de (u_n) sont des rationnels et comme le suggérait les constructions du 1. a. que $u_1 = \dfrac{19}{7},\ u_2 = \dfrac{23}{11} = 2,\ u_3 = \dfrac{9}{5} = 1,8$.

(c) Pour $n > 0$ on peut écrire $u_n = \dfrac{4 + \frac{15}{n}}{4 + \frac{3}{n}}$.

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1.}$