TS : contrôle sur les suites et les démonstrations par récurrence

I Vrai ou faux ? (d'après concours ESIEE)

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses et justifier, soit par une propriété du cours, soit par un contre-exemple (éventuellement graphique).

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles vérifiant pour tout $n \geqslant 0$: .$u_n \leqslant v_n \leqslant 2u_n$.
   (a) Si (u_n) converge, alors (v_n) converge.
   (b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
   (c) Si (u_n) ne converge pas, alors (v_n) ne converge pas.
2. Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$:
   (a) Si (u_n) est strictement décroissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
   (b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

II

Démontrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

III

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_{à} = 1 \\ u_{n+1} = u_n(5+u_n) \end{cases}$.

1. Démontrer que tous les termes de cette suite (u_n) sont positifs.
2. Étudier la monotonie de cette suite.

IV

Étudier dans chaque cas la limite éventuelle de la suite (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{3n^2+5n+1}{n^2+1}$

b) $u_n = \dfrac{n+2}{5n^2+1}$

c) $u_n = \dfrac{5+\cos(n)}{n+1}$

V D'après bac métropole juin 2009

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout $n \geqslant 1$: $nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1$.
Ce tableau donne les dix premiers termes de la suite :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

1. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.
2. Conjecturer la nature de la suite ; en déduire une conjecture sur l'expression de w_n en fonction de n.
3. En déduire la valeur de w_{2000}.

VI Antilles-Guyane septembre 2010

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$.

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :
$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$
   (a) Calculer v_0.
   (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   (d) Exprimer v_n en fonction de n.
3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :
$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$
   (a) Calculer w_0.
   (b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
   (c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.
   (d) Exprimer w_n en fonction de n.
4. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.
5. Pour tout entier naturel n, on pose :
$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$
   Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:
$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Barème :

Exercice	I	II	III	IV	V	VI
Points	2	3	2	2,5	3	7