

TS : contrôle sur les nombres complexes (2 heures)

I 1,5 point

Déterminer les formes algébriques des nombres suivants :

$$A = (2 + 3i)(1 - 7i)$$

$$B = (2 - 3i)^2$$

$$C = \frac{2 + 5i}{3 - 2i}$$

II 2 points

Donner une forme trigonométrique des nombres suivants :

$$A = 1 + i$$

$$B = \sqrt{3} - i$$

$$C = -5$$

$$D = -3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

III 2,5 points

1. Donner une forme trigonométrique de $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.
2. En déduire la forme algébrique de

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{2014}.$$

IV 3 points

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a) $2iz = 1 - z$

b) $(2 + 3i)z = 1 - 5i$

c) $z = 2\bar{z}$

d) $z^2 = -3$

e) $3z^2 + 2z + 5 = 0$

V 2 points

Soit z un nombre complexe et soit z' le nombre complexe défini par $z' = (z - i)(3iz - 4)$.

On pose $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ et $z' = x' + iy'$ $x' \in \mathbb{R}$ et $y' \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer x' et y' en fonction de x et de y .
2. (a) Déterminer z tel que z' soit imaginaire pur.
(b) Représenter l'ensemble des points d'affixe z correspondants dans le plan complexe.

VI 3 points

On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{2}(1 + i)$ et $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

1. Déterminer la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
2. Déterminer la forme trigonométrique de z_1 , z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

VII 3 points

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 - i$, $z_B = 2 - 2i$ et $z_C = 1 + 5i$.

1. (a) Calculer la forme algébrique de

$$z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}.$$

- (b) En déduire le module et un argument de z .
2. Interpréter $|z|$ et $\arg(z)$ à l'aide des points A, B et C.
3. En déduire la nature du triangle ABC.

VIII 3 points

Résoudre soigneusement l'inéquation suivante :

$$e^{\frac{1}{x}} \leq e^{x+3}.$$