TS1-TS2-TS3 : contrôle commun n° 4 (4 heures)

Exercice 1 (5 points)

Dans une usine, on utilise deux machines A et B pour fabriquer des pièces.

1. La machine A assure 40 % de la production et la machine B en assure 60 %.
   On estime que 10 % des pièces issues de la machine A ont un défaut et que 9 % des pièces issues de la machine B ont un défaut.
   On choisit une pièce au hasard et on considère les évènements suivants :
   — A : « La pièce est produite par la machine A »
   — B : « La pièce est produite par la machine B »
   — D : « La pièce a un défaut ».
   — $\overline{D}$, l'évènement contraire de l'évènement D.

   (a) Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

   (b) Calculer la probabilité que la pièce choisie présente un défaut et ait été fabriquée par la machine A.

   (c) Démontrer que la probabilité $P(D)$ de l'évènement D est égale à $0,094$.

   (d) On constate que la pièce choisie a un défaut.
   Quelle est la probabilité que cette pièce provienne de la machine A ?

2. On décide de contrôler cette machine en examinant 150 pièces choisies au hasard dans la production de la machine A. On assimile ces 150 tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise.
   On note X le nombre de pièces qui sont non conformes parmi les 150 pièces choisies.

   (a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

   (b) Calculer la probabilité qu'il y ait au plus une pièce non conforme.

   (c) Calculer $p(X \leqslant 149)$. On donnera la valeur exacte.

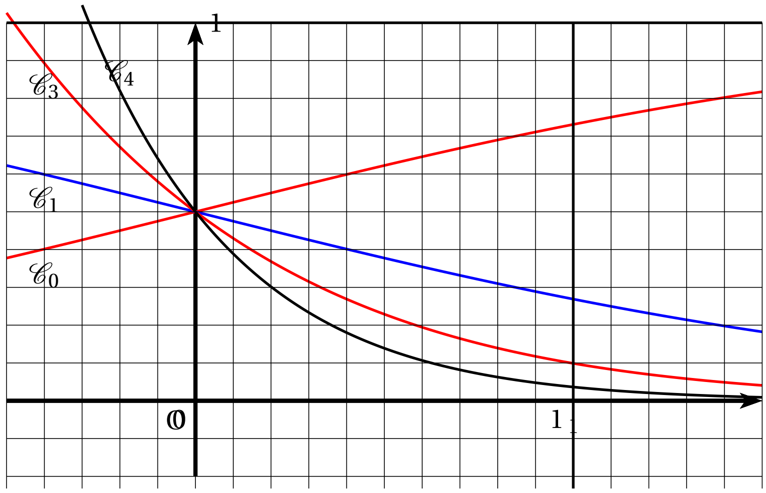
3. Dans cette question, on examine n pièces quelconques.
   Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.

Exercice 2 (5 points)

Soit n un entier naturel.
On note f_n, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$. Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



Partie A : *Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathscr{C}_n$*

1. Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On précisera ses coordonnées.
2. Étude de la fonction f_0
   (a) Étudier le sens de variation de f_0.
   (b) Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.
   (c) Dresser le tableau de variation de fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.
3. Étude de la fonction f_1
   (a) Étudier les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$
   (b) Étudier les variations de f_1 et dresser son tableau de variation.
4. Étude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$
   (a) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a :
   $$f_n(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{nx}+\mathrm{e}^{(n-1)x}}.$$
   (b) Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (c) Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

Partie B : *Étude d'une suite liée aux fonctions f_n*

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer u_1 puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_0.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$.
3. En déduire que, pour tout entier n : $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.
4. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 3 (5 points)

Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On suppose connu le résultat suivant :

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', $\arg\left(z \times z'\right) = \arg(z) + \arg\left(z'\right)$ à 2π près.
Démontrer alors que, quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', on a :

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \text{ puis } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg\left(z'\right) \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on appelle A le point d'affixe 1 et $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.

La figure sera réalisée avec 4 cm pour unité graphique.

Partie A

On considère l'équation

$$(E): \quad z^2 - 2z + 2 = 0,$$

où z est un nombre complexe. On appelle z_1 et z_2 les solutions de (E).

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
2. On appelle M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.
   Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

Partie B

On considère l'application f du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{2z-1}{2z-2}.$$

1. Placer le point A et tracer le cercle $\mathscr{C}$ sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que pour tout complexe z distinct de 1 on a

$$\left(z' - 1\right)(z-1) = \frac{1}{2}.$$

3. Montrer que pour tout point M distinct de A on a :
   - $\text{A}M \times \text{A}M' = \frac{1}{2}$;
   - $M' \neq \text{A}$;
   - $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\text{A}M}\right) + \left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\text{A}M'}\right) = 0 + 2k\pi$, où k est un entier relatif
4. On considère le point P d'affixe $z_{\text{P}} = 1 + \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$. Construire le point P.
5. En utilisant la question 3, expliquer comment construire le point P$'$, image de P par f, et réaliser cette construction.
6. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit un point M appartenant à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = \frac{3}{4}$. Soit M' son image par f.
   (a) Montrer que le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}'$ de centre O de rayon 1.
   (b) Tout point de $\mathscr{C}'$ a-t-il un antécédent par f ?

Exercice 4 (5 points)

Pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit (u_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \end{array}\right.$ pour tout entier naturel n.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~1]$.
   En déduire que si $x \in [0~;~1]$ alors $f(x) \in [0~;~1]$.

Partie B

1. Construire les quatre premiers termes de la suite sur la courbe fournie en annexe.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0~;~1]$.
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
   Déterminer sa limite.

Exercice 4 de spécialité (5 points)

Pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le but de cet exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.
On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
« si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p , alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \; mod \; p$ ».

Partie A : Quelques exemples

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.
2) Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3) Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k , le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
4) Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?
5) À l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B : Divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

1) Démontrer qu'il existe un entier $n > 1$ tel que $4^n \equiv 1 \; mod \; p$
2) Soit $n > 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \; mod \; p$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \; mod \; p$ et r le reste de la division euclidienne de n par b
   (a) Démontrer que $4^r \equiv 1 \; mod \; p$. En déduire que $r = 0$.
   (b) Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.
   (c) En déduire que b divise $p - 1$.

Annexe à l'exercice 4 (pour les non-spécialistes)