TS1-TS2-TS3 : contrôle commun n° 3 (4 heures)

Exercice 1

PARTIE I

Soi h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x + x + 1$.

1. Étudier le sens de variation de h et ses limites.
2. Montrer que l"équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α. Justifier.
4. Donner le signe de $h(x)$.

Partie II

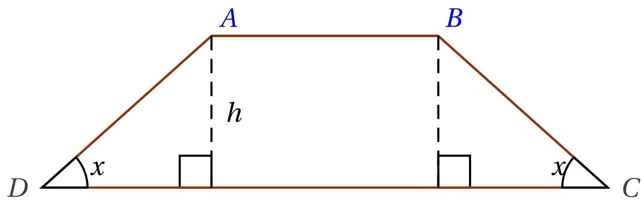
Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

1. Justifier que f est dérivable et montrer que $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x h(x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$.
2. En déduire le sens de variation de f.
3. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
4. Soit (T) la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (a) Donner une équation de (T).
   (b) Étudier la position relative de (T) et $\mathscr{C}$.
5. (a) Déterminer les limites de f. Dresser le tableau de variation de f.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = 0$.
   Que peut-on en dire alors de (D) où (D) est la droite d'équation $y = x$?
   (c) Étudier la position relative de (D) et $\mathscr{C}$.
   (d) Tracer sur une même figure $\mathscr{C}$, (D) et (T) sur $[-2 ; 4]$.

Exercice 2

1. Soit $\mathscr{A}$ la fonction définie sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $\mathscr{A}(x) = (\cos(x) + 1)\sin(x)$.
   (a) Démontrer que la fonction dérivée $\mathscr{A}'$ de la fonction $\mathscr{A}$ est définie sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par :
   $$\mathscr{A}'(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1.$$
   (b) Étudier le signe du trinôme $2X^2 + X - 1$.
   (c) En déduire le signe de $\mathscr{A}'$ en fonction de x, puis les variations de la fonction $\mathscr{A}$.
2. **Application numérique**

   On considère le trapèze isocèle ABCD ci-dessous où AD = AB = BC = 1.
   Trouver la valeur de l'angle x pour laquelle l'aire du trapèze est maximale.



Exercice 3

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par :

$$z_0 = 1 \text{ et } z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n.$$

On note An le point d'affixe z_n,

1. (a) Calculer sous forme algébrique les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
   (b) Dans un repère orthonormé direct (unité graphique 8 cm), placer les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6
2. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$
   (a) Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$: $z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_n - z_{n-1})$.
   (b) En déduire une relation entre d_n et d_{n-1} pour $n \geqslant 1$ puis une expression de d_n en fonction de n et d_0.
   (c) Fournir une interprétation géométrique des nombres d_n.
   (d) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_kA_{k+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$; L_n est la longueur de la ligne polygonale de sommets successifs A_0, A_1, ..., A_n.
   Déterminer L_n en fonction de n, puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Pour tout entier naturel n, on désigne par a_n l'argument de z_n dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.
   (a) Établir une relation entre a_n et a_{n-1} pour tout entier $n \geqslant 1$.
   En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
   (b) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

Exercice 4 pour les non-spécialistes

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   (a) $\left(\mathrm{e}^{3x+1}\right)^2 = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{-2x}}$.
   (b) $\mathrm{e}^{\frac{-3x+1}{2x+3}} \leqslant 1$.
2. Simplifier l'écriture suivante : $A = \dfrac{\mathrm{e}^{2-x} \times \mathrm{e}^{3x-5}}{\mathrm{e}^{-2x} \times \mathrm{e}^2}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
   (a) $3 + 4\mathrm{i} - 4\mathrm{i}z = 2z - 4$
   (b) $2z + \overline{z} = 9 + \mathrm{i}$
   (c) $z^4 + z^2 - 20 = 0$
4. **QCM :** Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.
   Aucun point ne sera donné si la réponse n'est pas justifiée.
   (a) Soit z un nombre complexe. Alors $|z + \mathrm{i}|$ est égal à
   a. $|z| + 1$ **b.** $|z - 1|$ **c.** $|\mathrm{i}\overline{z} + 1|$
   (b) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ.
   Un argument de $\dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :
   a. $-\dfrac{\pi}{3} + \theta$ **b.** $\dfrac{2\pi}{3} + \theta$ **c.** $\dfrac{2\pi}{3} - \theta$
   (c) La forme algébrique de $\dfrac{5 - 2\mathrm{i}}{4 + 3\mathrm{i}}$ est :
   a. $\dfrac{26}{25} + \dfrac{7}{25}\mathrm{i}$ **b.** $\dfrac{14}{25} - \dfrac{23}{25}\mathrm{i}$ **c.** $\dfrac{5}{4} - \dfrac{2}{3}\mathrm{i}$ **d.** $\dfrac{26}{24} - \dfrac{23}{25}\mathrm{i}$
   (d) Le conjugué de $\dfrac{1 - z}{1 + \mathrm{i}}$, où z est un nombre complexe est :
   a. $\dfrac{1 + z}{1 - \mathrm{i}}$ **b.** $\dfrac{-1 - z}{-1 + \mathrm{i}}$ **c.** $\dfrac{1 - \overline{z}}{1 - \mathrm{i}}$ **d.** $(1 - z)(1 - \mathrm{i})$

Exercice 4 pour les spécialistes

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a est un entier naturel b est un entier naturel c est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à c la valeur 0 Demander la valeur de a Demander la valeur de b
Traitement :	Tant que $a \geq b$ Affecter à c la valeur $c+1$ Affecter à a la valeur $a-b$ Fin tant que
Sortie :	Afficher c Afficher a

Partie 1 :

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ puis avec $a = 15$ et $b = 3$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
2. Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie 2 :

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.
Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m+5$ par 26 et on le note p.
Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.
2. En s'inspirant si besoin de la partie 1, écrire un algorithme qui, pour une valeur de m entrée par l'utilisateur, affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie 3 :

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $9x + 26z = 1$.
2. En déduire un nombre entier vérifiant $9x \equiv 1\,[26]$.
3. Démontrer l'équivalence : $9m+5 \equiv p\,[26] \Leftrightarrow m \equiv 3p-15\,[26]$
4. Décoder le mot TS.