TS1-TS2-TS3 : contrôle commun n° 2 (4 heures)

I

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. La suite de terme général $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
   (a) Si $u_0 = 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
   (b) Si $u_0 = -2$, alors la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Si $u_0 = -\dfrac{1}{2}$, alors la suite (u_n) est constante.
3. Toute suite v à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0.
4. La suite de terme général $u_n = 0{,}999\,999\,999^n$ converge vers 1.

II

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010 + n)$. En 2010, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

1. Montrer que la situation peut être modélisée par :

$$u_0 = 50 \text{ et pour tout entier naturel } n \text{ par la relation : } u_{n+1} = 0{,}95u_n + 3.$$

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60 - u_n$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}95$.
   (b) Calculer v_0. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 60 - 10 \times (0{,}95)^n$.
3. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2015. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.
4. (a) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a l'égalité

$$u_{n+1} - u_n = 0{,}5 \times (0{,}95)^n.$$

   (b) En déduire la monotonie de la suite.
5. Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres de la forêt en 2010.
6. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter.

III

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \end{cases}$

1. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que la suite est décroissante.
3. Justifier la convergence de la suite.
4. Calculer sa limite

IV

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2-8x+1\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6x-1}{3x^2+x-2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{5x-3}{2x+1}}$

V

Sot f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\begin{cases} ax+3 & \text{si } x\in\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right[\\ \sqrt{\frac{2x-1}{x+15}} & \text{si } x\in\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right] \\ \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{si } x\in]1\,;\,+\infty[\end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue en 1. (indication : penser à la quantité conjuguée)
2. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en $\frac{1}{2}$?

VI

Soit (E) l'équation : $x^3-2x-2=0$.

1. Démontrer que l'équation admet au moins une solution dans l'intervalle $[-2\,;\,3]$.
2. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E) à l'aide des représentations graphiques des fonctions $x\mapsto x^3$ et $x\mapsto 2x+2$.
3. Justifier par une étude de fonction le nombre de solutions trouvé précédemment.
4. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la ou des solutions de (E).

VII (Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
   (b) Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
   (c) Établir que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.
   (d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
   (a) Établir que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.
   (b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
   Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

VII (Pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité)

Important *: Dans tout l'exercice on pourra utiliser la propriété suivante sans démonstration :*
« Soirnt $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $x^n - 1$ est divisible par $x - 1$. »

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $u_{n+2} \equiv u_n\ [4]$.
   (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$; $u_{2k} \equiv 2\ [4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0\ [4]$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
4. On suppose que n est pair. Démontrer que $2u_n - 28$ est divisible par 200. En déduire les deux derniers chi res de l'écriture décimale de u_n.
5. On suppose désormais que n est impair. Démontrer que $2u_n - 128$ est divisible par 200. En déduire les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n.