TS : contrôle sur la fonction ln (2 heures)

I (1,5 point)

Exprimer en fonction de $\ln 2$ les rôles suivants :

$\ln 8$; $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$; $\ln(16e)$; $\ln(\sqrt{2})$

II (3 points)

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(2x-1) + \ln(-x+5)$

b) $g(x) = \ln\left(\frac{2x+3}{x-2}\right)$

III (3 points)

Résoudre l'inéquation : $\ln(x) \geqslant \ln 4 - \ln(x+1)$

IV (2,5 points)

Déterminer la limite aux bornes de son ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x - \ln x$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$

b) $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ définie sur $]-\infty\,;\,-1[\cup]0\,;\,+\infty[$

V (3 points)

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x - x\ln x.$$

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et calculer $g'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

VI (7 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1+x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représente dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

On note (D) la droite d'équation $y = x$.

Partie A :

1. (a) Étudier le sens de variation de la fonction f.

   (b) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. On désigne par g la fonction définie par

$$g(x) = f(x) - x.$$

   (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$.
   En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

   (c) Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser son tableau de variation.

   (d) Montrer que sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β avec $\alpha < 0$ et β appartenant à l'intervalle $[2\,;\,3]$.

   (e) A l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite (D).

Partie B :

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right. .$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$2 \leqslant u_n \leqslant \beta.$$

2. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.