BACCALAURÉAT BLANC

mars 2016

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée, mais pas le prêt entre candidats

Le candidat doit traiter les exercices I, II, III et l'exercice IV en fonction de l'enseignement de spécialité suivi.
L'exercice de spécialité est en page 5.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice I

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$ muni du repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u} ; \vec{v}\right)$.

1. Soit le polynôme P tel que, pour tout z de $\mathbb{C}$, $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$.

   a. Montrer que 2 est une racine du polynôme $P(z)$.

   b. Déterminer les réels a, b, c tels que

   $$P(z) = (z-2)\left(az^2 + bz + c\right)$$

   et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. On note α la solution de l'équation ci-dessus dont la partie imaginaire est strictement positive et β le conjugué de α.
   Soient A, B et C les points d'affixes respectives α , $1-\mathrm{i}$ et 2.
   Déterminer la nature exacte du quadrilatère $OACB$.

3. Soit f l'application de $\mathscr{P}$ privé du point C dans $\mathscr{P}$ qui au point M d'affixe z, $(z \neq 2)$, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

   $$z' = \frac{z-(1+i)}{z-2}.$$

   a. Déterminer $f(A)$ et $f(B)$. Déterminer le point E tel que $f(E) = C$.

   b. Quelles distances représentent les réels $|z-(1+\mathrm{i})|$et $|z-2|$?
   En déduire que si M appartient à la médiatrice de $[AC]$, M' appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

Exercice II

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}\right)$.

On considère la droite D passant par le point A de coordonnées $(3 ; -4 ; 1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1 ; -3 ; 1)$.

On considère la droite D' dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -1-t \\ y &=& 2+t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z &=& 1-t \end{array}\right.$$

On admet qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites D et D'. On se propose de déterminer une représentation paramétrique de cette droite Δ et de calculer la distance entre les droites D et D', distance qui sera définie à la question **5.**

On note H le point d'intersection des droites D et Δ, H' le point d'intersection des droites D' et Δ. On appelle P le plan contenant la droite D et la droite Δ. On admet que le plan P et la droite D' sont sécants en H'. Une figure est donnée ci-dessous.

1. On considère le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(1 ; 0 ; -1)$. Démontrer que $\vec{w}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3 ; 2 ; 3)$.

   a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan P.

   b. Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $3x + 2y + 3z - 4 = 0$.

3. a. Démontrer que le point H' a pour coordonnées $(-1 ; 2 ; 1)$.

   b. En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ.

4. a. Déterminer les coordonnées du point H.

   b. Calculer la longueur HH'.

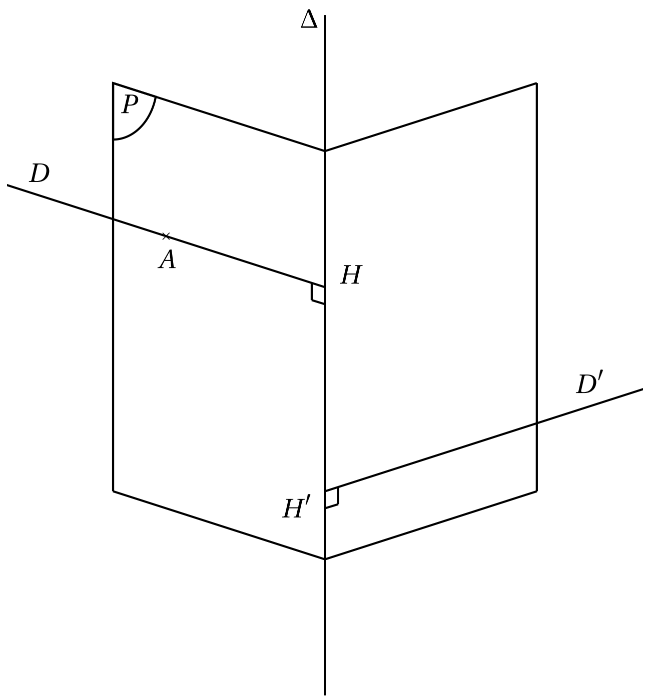
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   L'objectif de cette question est de montrer que, pour tout point M appartenant à D et tout point M' appartenant à D', $MM' \geqslant HH'$.

   a. Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ peut s'écrire comme la somme de $\overrightarrow{HH'}$ et d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{HH'}$.

   b. En déduire que $\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|^2 \geqslant \left\|\overrightarrow{HH'}\right\|^2$ et conclure.

   La longueur HH' réalise donc le minimum des distances entre une point de D et une point de D'. On l'appelle distance entre les droites D et D'.

FIGURE



Exercice III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + \left(x^2 + 2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - \left(x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de g et déterminer son signe.
3. En déduire le tableau de variation de g.

4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis justifier que

$$0,35 \leqslant \alpha \leqslant 0,36.$$

5. En déduire le signe de g.

Partie II : Étude de f

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel.
3. En déduire, à l'aide de la partie I, les variations de f et donner son tableau de variation.
4. a. Démontrer que :

$$f(\alpha) = \alpha\left(1 + 2\mathrm{e}^{-\alpha}\right).$$

   b. À l'aide de l'encadrement de α déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 4×10^{-2} .
5. Donner une équation de la tangente T à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
6. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)]$.
7. En déduire que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
   Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à Δ.

Exercice IV

Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$.

1. Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

   a. Étudier le sens de variation de f et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal . (On prendra comme unité 2 cm).

   b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\right)$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

   b. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) \leqslant x$.

   c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

   d. Prouver que la suite (u_n) converge.
3. a. Soit ℓ la limite de la suite (u_n).Montrer que ℓ est solution de l'équation $x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

   b. En déduire sa valeur.

Exercice IV (spécialité)

Pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance, le rang du mois dans l'année.

Par exemple, pour une personne née le 14 mai, le numéro du jour de naissance est 14 et le numéro du mois de naissance est 5.

Partie A

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :

« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».

Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1er août ! ».

1. Vérifier que pour une personne née le 1er août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.

2. **a.** Pour un spectateur donné, on note j le numéro de son jour de naissance, m celui de son mois de naissance et z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).

   Exprimer z en fonction de j et de m et démontrer que z et m sont congrus modulo 12.

   b. Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul (A).

Partie B

Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m, le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z = 12j + 31m$.

Dans les questions suivantes, on étudie différentes méthodes permettant de retrouver la date d'anniversaire du spectateur.

1. **Première méthode** :

   On considère l'algorithme suivant :

   ```
   Variables :    j et m sont des entiers naturels
   Traitement :   Pour m allant de 1 à 12 faire :
                    Pour j allant de 1 à 31 faire :
                      z prend la valeur 12j + 31m
                      Afficher z
                    Fin Pour
                  Fin Pour
   ```

   Modifier cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que $12j + 31m = 503$.

2. **Deuxième méthode** :

   a. Démontrer que $7m$ et z ont le même reste dans la division euclidienne par 12.

   b. Pour m variant de 1 à 12, donner le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12.

   c. En déduire la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

3. **Troisième méthode** :

   a. Démontrer que le couple $(-2 ; 17)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$.

   b. En déduire que si un couple d'entiers relatifs $(x ; y)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$, alors $12(x+2) = 31(17 - y)$.

   c. Déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$, solutions de l'équation $12x + 31y = 503$.

   d. Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs $(x ; y)$ tel que $1 \leqslant y \leqslant 12$.

   En déduire la date d'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).