BACCALAURÉAT BLANC

mars 2015

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6
Le sujet comporte des annexes (feuilles 5 et 6), **à rendre avec la copie**.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée, mais pas le prêt entre candidats

Le candidat doit traiter les exercices I, II, III et l'exercice IV en fonction de l'enseignement de spécialité suivi.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

I

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
   En déduire que si $x \in [0\ ;\ 1]$ alors $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.

Partie B

1. Construire les quatre premiers termes de la suite sur la courbe fournie en annexe.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0\ ;\ 1]$.
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
   Déterminer sa limite.

II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation

$$(E): \quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.
   a. Vérifier que z_1 est une solution de (E).
   b. Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
   c. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée en annexe et tracer, sur la figure donnée en annexe, les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $z_n = 2^n\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n \mathrm{i}}{2}\right)$.
4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

   Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.
5. On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.
   a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ell_n = 2\sqrt{3}\left(2^n - 1\right)$.
   b. Calculer le plus petit entier n tel que $\ell_n \geqslant 1000$.

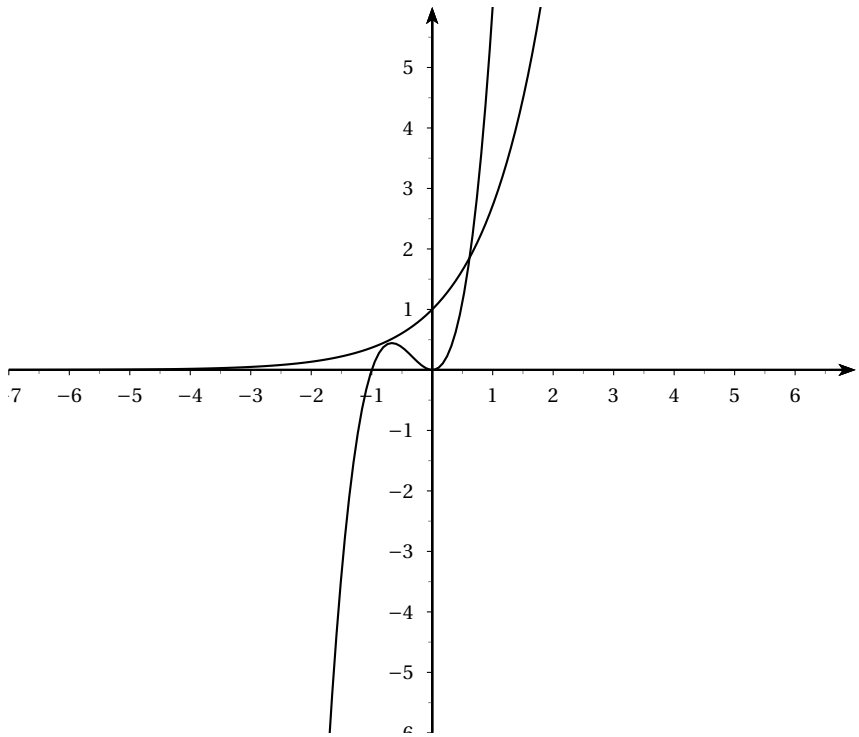
III

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle :

$$\mathrm{e}^x = 3\left(x^2 + x^3\right)$$

PARTIE A : conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\left(x^2 + x^3\right)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

PARTIE B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. **a.** Étudier selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.
   b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.
   c. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E).
2. On considère la fonction h, définie pour tout nombre réel x de $]-1\ ;,\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x.$$

   Montrer que, sur $]-1\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$, l'équation (E) est équivalente à l'équation $h(x) = 0$.
3. **a.** Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à $]-1\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}$$

   b. Déterminer les variations de la fonction h.
   c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.
4. Conclure quant à la conjecture de la **partie A**.

IV Pour les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que pour tout réel x :
   $$f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x.$$
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On définie la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - m\mathrm{e}^{-x}$$

et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ du plan.

1. a. Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
   b. Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.
2. On a représenté en annexe les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, et $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-$e).
   Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.
3. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation
   $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m.

IV Pour les candidats suivant l'enseignement de spécialité

Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y.

D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y, et réciproquement. De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Soit n un entier naturel. On note x_n la quantité de fonds détenue par l'agence X, et y_n la quantité de fonds détenue par l'agence Y au 1er janvier de l'année $2014 + n$, exprimées en millions d'euros.

On note U_n la matrice $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On suppose que le 1er janvier de l'année 2014, l'agence X possède 50 millions d'euros et l'agence Y possède 10 millions d'euros.

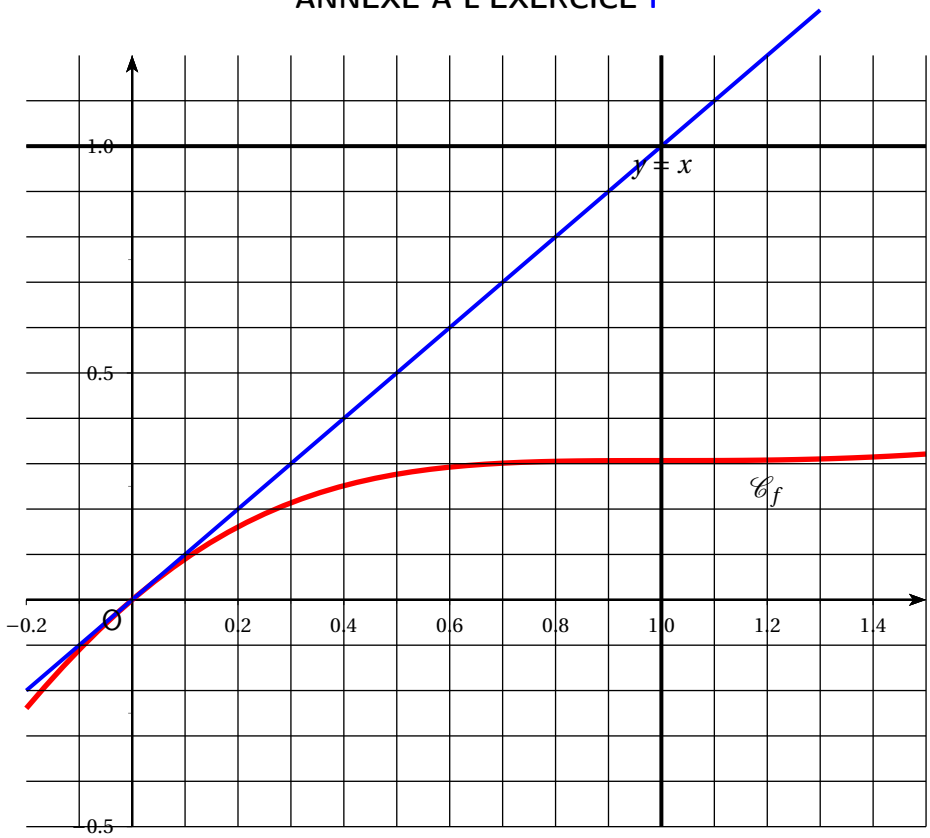
L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation suivante :

$$U_{n+1} = AU_n + B, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

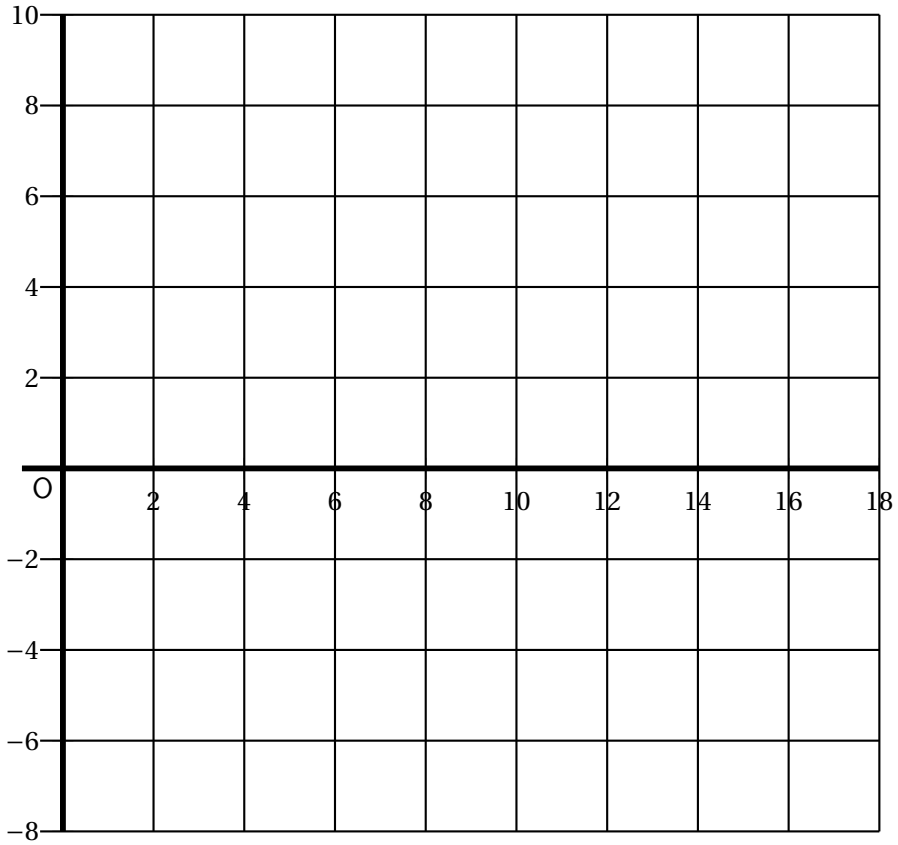
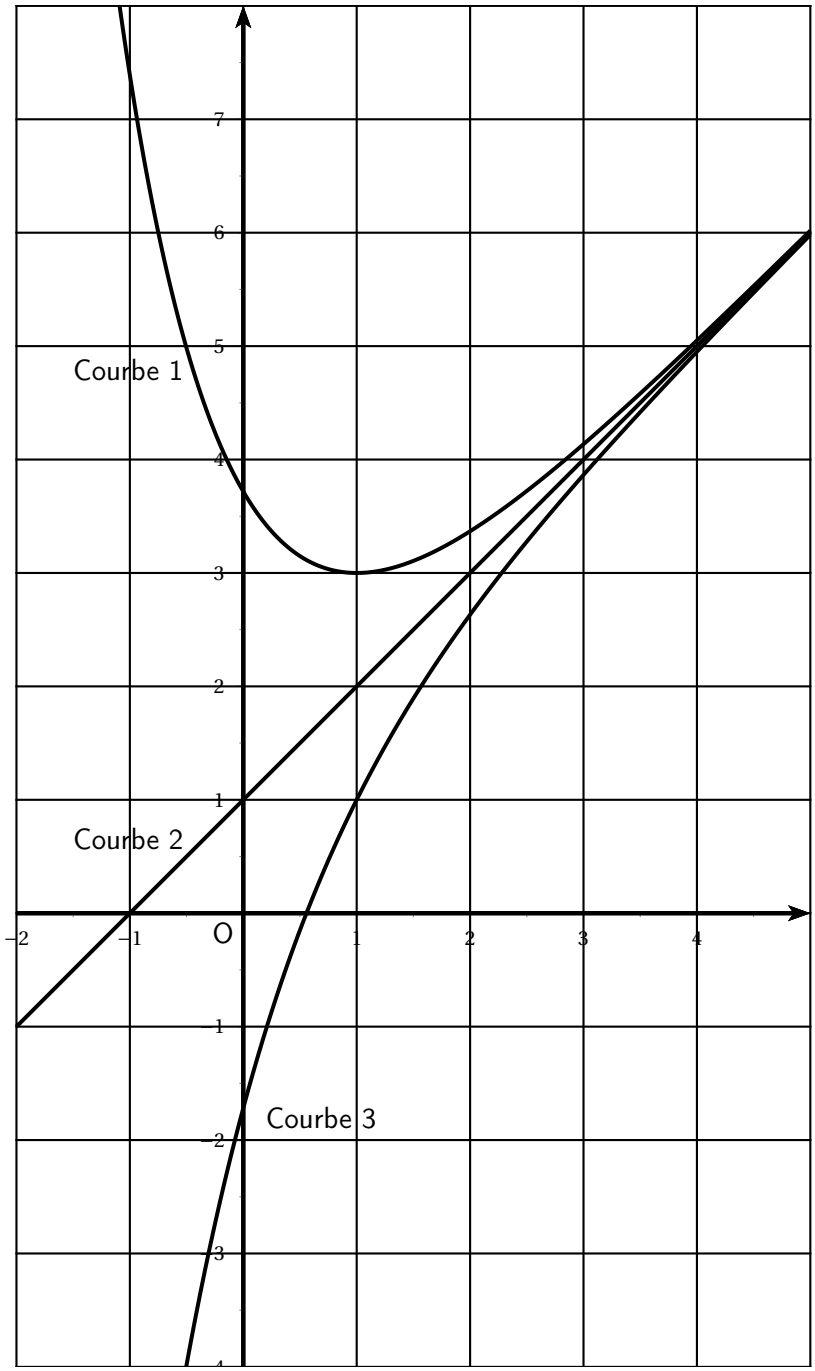
1. Interpréter dans le contexte de l'exercice le coefficient 0,6 de la matrice A et le coefficient 3 de la matrice B.
2. Donner la matrice U_0 puis calculer la quantité de fonds détenue par chacune des agences X et Y en 2015, exprimée en millions d'euros.
3. On note $D = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix}$.
   a. Donner sans détailler le calcul, la matrice PDQ.
   b. Expliciter le calcul du coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne du produit matriciel QP.
   Dans la suite, on admettra que $QP = I$.

   On admettra dans la suite de cet exercice que pour tout entier naturel non nul n,
   $$A^n = PD^nQ.$$
4. On pose pour tout entier naturel n :
   $$V_n = U_n - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}.$$
   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$.
   b. Déterminer V_0 puis pour tout entier naturel n, donner l'expression de V_n en fonction de A, n et V_0.
5. Soit n un entier naturel. On admet que
   $$A^n = \begin{pmatrix} 0,25 \times 0,3^n + 0,75 \times 0,7^n & 0,375\left(-0,3^n + 0,7^n\right) \\ 0,5\left(-0,3^n + 0,7^n\right) & 0,75 \times 0,3^n + 0,25 \times 0,7^n \end{pmatrix}.$$
   a. Déterminer le coefficient de la première ligne de la matrice V_n en détaillant les calculs.
   b. En déduire l'expression de x_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le cadre du problème.

ANNEXE À L'EXERCICE I



ANNEXE À L'EXERCICE II



ANNEXE À L'EXERCICE IV