BACCALAURÉAT BLANC

mars 2014

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5
La page 5 comporte une annexe et est à rendre avec la copie

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée, mais pas le prêt entre candidats

Le candidat doit traiter les exercices I, II, III et l'exercice IV en fonction de l'enseignement de spécialité suivi.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

I

Partie A On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}$.

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe. Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
   - **a.** Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.
   - **b.** Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathscr{C})$ sur $[0\,;\,1]$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & f(u_n), \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

II

Le plan est rapporté à un repè re orthonormal direct $\left(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$z^2 + 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a = -4\sqrt{3} - 4\mathrm{i}$ et $b = -4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$.
   Calculer les distances OA, OB et AB puis en déduire la nature du triangle OAB.
3. On désigne par C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.
   D est le point d'affixe d où D est tel que OD = OC et $\left(\overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{OD}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. .
   - **a.** En déduire que $\dfrac{d}{c} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   - **b.** En déduire l'écriture algébrique de d.
4. On appelle G le point tel que $-\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.
   - **a.** Montrer que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6\mathrm{i}$.
   - **b.** Placer les points A, B, C, D et G sur une figure. (Unité graphique : 1 cm).
   - **c.** Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.
5. **a.** Justifier l'égalité $\dfrac{c-g}{a-g} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   - **b.** En déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{GA},\ \overrightarrow{GC}\right)$, ainsi que la valeur du rapport $\dfrac{GC}{GA}$.
     Que peut-on en déduire concernant la nature du triangle AGC ?

III

On considère la fonction numérique f, de la variable réelle x, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$.
On appelle $(\mathscr{C}_f)$ la courbe d' équation $y = f(x)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.
On prendra 2 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées, et 6 cm pour π unités sur l'axe des abscisses.

1. Montrer que, pour tout réel x, $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
   En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et l'existence d'une asymptote pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
2. Montrer que la fonction dérivée de f vérifie : $f'(x) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-x}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, pour x élément de $\mathbb{R}$.
3. On étudie la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$.
   Recopier et compléter le tableau suivant :

Valeur de x	$-\dfrac{\pi}{2}$ $\cdots$ π
Valeur de $x+\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$ $\dfrac{\pi}{2}$ $\cdots$
Signe de $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\cdots$ 0 $\cdots$

   En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$.
4. Représenter la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ ainsi que les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ d'équations $y = -\mathrm{e}^{-x}$ et $y = \mathrm{e}^{-x}$.
5. Déterminer algébriquement sur $\mathbb{R}$, puis sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$, les coordonnées des points communs à :
   a. $(\mathscr{C}_f)$ et l'axe des abscisses.
   b. $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_1)$.
   c. $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_2)$.

Exercice IV pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et, pour tout entier} \quad n \geqslant 1,\ u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)u_{n-1} + \frac{6}{n}.$$

1. **a.** Calculer u_1.
   b. Les valeurs de $u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}$ sont respectivement é gales à :
   45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.
   À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dé finie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.
2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
   Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :
   $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.
4. Valider la conjecture émise à la question **1. b.**.

Exercice IV pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Des scientifiques étudient l'évolution d'une maladie dans un univers isolé. Ils modélisent le problème en séparant les individus en trois catégories.

- S : l'individu est sain (non malade et non infecté)
- PS : l'individu est porteur sain (non malade mais porteur du virus)
- M : l'individu est malade et infecté

Partie A

D'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus suivant :

- parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent porteurs sains vaut $\frac{1}{3}$; celle de ceux qui deviennent malades vaut $\frac{1}{3}$ et celle de ceux qui restent sains vaut $\frac{1}{3}$.
- parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades vaut $\frac{1}{2}$; de ceux qui restent porteurs sains $\frac{1}{2}$ et aucun ne redevient sain.
- les individus malades le restent.

Pour $n \in \mathbb{N}$; on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ la matrice donnant l'état probabiliste au bout de n semaines où a_n, b_n et c_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade la n^{e} semaine, et on suppose $P_0 = \begin{pmatrix} 0,99 & 0 & 0,01 \end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
2. Déterminer la matrice de transition A associée au problème.
   On a ainsi, pour tout entier naturel n,
   $$P_{n+1} = P_n \times A.$$
3. Démontrer que pour tout entier naturel n,
   $$P_n = P_0 \times A_n.$$
4. Déterminer l'état probabiliste P_3 au bout de trois semaines (arrondir les valeurs à 10^{-2}).
   Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de trois semaines ?

Partie B

Variables :	a, b, c, i et n sont des entiers
Initialisation :	Demander la valeur de n Affecter à a la valeur 0,99 Affecter à b la valeur 0 Affecter à c la valeur 0,01 Affecter à i la valeur 0
Traitement :	Tant que $i < n$ Affecter à c la valeur $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$ Affecter à b la valeur $\frac{a}{3} + \frac{b}{2}$ Affecter à a la valeur $\frac{a}{3}$ Affecter à i la valeur $i+1$ Fin tant que
Sortie :	Afficher a , b et c

On considère l'algorithme ci dessus permettant de modéliser l'évolution de la maladie.
Faire fonctionner cet algorithme pour $n = 3$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape et comparer avec les résultats obtenus à la question 4 de la partie A.

Partie C

Au bout de quatre semaines, les scientifiques découvrent un vaccin qui modifie l'évolution hebdomadaire de la maladie.
La nouvelle matrice de transition est la suivante :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On note $Qn = \begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n \end{pmatrix}$ la matrice donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination.
u_n ; v_n et w_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n^{e} semaine après la vaccination.
Pour tout entier naturel n, on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$ avec $Q_0 = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,10 & 0,89 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^2 et B^3 (les justifications ne sont pas demandées).
2. Démonter que pour tout entier $n \geqslant 2$, $B^n = B^2$.
3. Donner sans démonstration une expression de Q_n en fonction de Q_0, B et n.
   En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$, $Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie : peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?

ANNEXE À L'EXERCICE I

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve