BACCALAURÉAT BLANC

février 2019

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet comporte 7 pages, numérotées de 1 à 7

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée, mais pas le prêt entre candidats

L'élève doit traiter les quatre exercices, l'exercice 2 étant différent suivant l'enseignement de spécialité suivi.

L'exercice 2 pour les élèves **ne suivant pas la spécialité mathématiques** se trouve en page 4

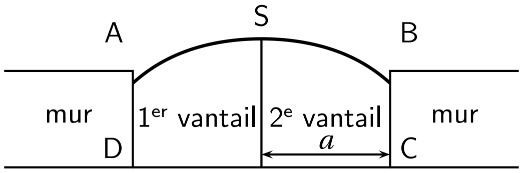
L'exercice 2 pour les élèves **suivant la spécialité mathématique** commence en page 4 et se poursuit en page 5

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (sur 5 points) - commun à tous les élèves

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a \leqslant 2$.

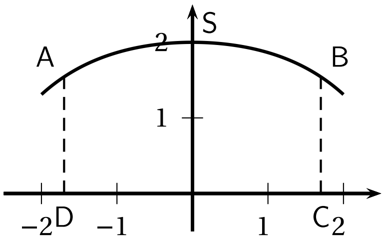
Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure ci-dessous. Les côtés [AD] et [BC] sont perpendiculaires au seuil [CD] du portail. Entre les points A et B, le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.



Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-2 ; 2]$ par :

$$f(x) = -\frac{b}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right) + \frac{9}{4} \quad \text{où } b > 0.$$

Le repère est choisi de façon que les points A, B, C et D aient pour coordonnées respectives $(-a ; f(-a))$, $(a ; f(a))$, $(a ; 0)$ et $(-a ; 0)$ et on note S le sommet de la courbe de f, comme illustré ci-dessous.



Partie A

1. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-2 ; 2]$, $f(-x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2 ; 2]$:

$$f'(x) = -\frac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}}\right).$$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 2]$ et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b.

Partie B

La hauteur du mur est de 1,5 m. On souhaite que le point S soit à 2 m du sol. On cherche alors les valeurs de a et b.

1. Justifier que $b = 1$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution a sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

3. On considère l'algorithme ci-contre où les variables A, B et M sont des nombres réels :
   a. Avant l'exécution de cet algorithme, les variables A et B contiennent respectivement les valeurs 0 et 2. Recopier et compléter le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme :

m	A	B	$B-A$
	0	2	2
1			
...	...	...	...

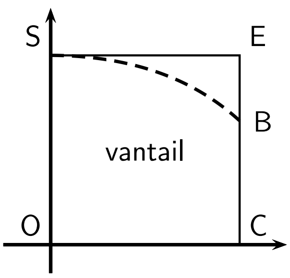
   Attention, ajouter au tableau autant de lignes que nécessaire jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête.

```
Tant que B − A > 0,1 faire :
    M ← (A + B)/2
    Si −1/8 (e^M + e^(−M)) + 9/4 > 1,5, alors :
        A ← M
    Sinon :
        B ← M
    Fin Si
Fin Tant que
```

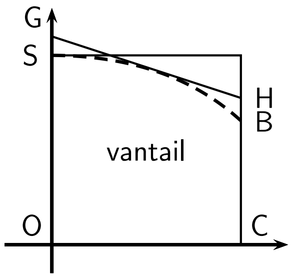
   b. En déduire une valeur approchée de a à $0,1$ près.

Partie C

Dans cette question, on choisit $a = 1,8$ et $b = 1$.
Pour découper les vantaux, le fabricant prédécoupe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un rectangle OCES, soit un trapèze OCHG comme dans les schémas ci-dessous. Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point F d'abscisse 1.



Forme 1 : découpe dans un rectangle



Forme 2 : découpe dans un trapèze

La forme 1 est la plus simple, mais visuellement la forme 2 semble plus économique.
Evaluer l'économie réalisée en termes de surface de bois en choisissant la forme 2 plutôt que la forme 1.

On rappelle la formule donnant l'aire d'un trapèze. En notant b et B respectivement les longueurs de la petite base et de la grande base du trapèze (côtés parallèles) et h la hauteur du trapèze :

$$\text{Aire } = \frac{b+B}{2} \times h.$$

Exercice 2 (sur 5 points) - uniquement pour les élèves ne suivant pas la spécialité mathématiques

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$.

Les points A, B, C ont pour coordonnées $A(3\,;\,-2\,;\,2)$, $B(6\,;\,1\,;\,5)$ et $C(6\,;\,-2\,;\,-1)$

Partie A

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
3. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $x+y+z-3=0$.
   Prouver que $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
4. Soit $\mathscr{P}'$ le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A.
   Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}'$.
5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

Partie B

Soit D le point de coordonnées $(0\,;\,4\,;\,-1)$.

1. Prouver que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2. Montrer que le volume du tétraèdre $ABDC$ est 27.
3. *a*. En calculant $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$, prouver que l'angle $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radians.

   b. On note K le pied de la hauteur issue de B du triangle BCD.
   Déduire de la question précédente la distance BK.

   c. Calculer l'aire du triangle BDC.
4. En déduire la distance du point A au plan (BDC).

Rappel : la distance d'un point M à un plan $\mathscr{P}$ est égale à la distance HM où H est le projeté orthogonal du point M sur le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 2 (sur 5 points) - uniquement pour les élèves suivant la spécialité mathématiques

1. Soit p un entier relatif donné.
   On s'intéresse dans cette question à l'équation (E_p) :

   $$3x+4y=p$$

   où $(x\,;\,y)$ est un couple d'entiers relatifs.

   a. Vérifier que le couple $(-p\,;\,p)$ est une solution particulière de l'équation.

   b. Démontrer que l'ensemble des solutions de (E_p) est l'ensemble des couples de la forme

   $$(-p+4k\,;\,p-3k)\text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

Dans la suite de l'exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne :

$$6x+8y-z=0.$$

2. Soit M_0 un point de coordonnées $(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ qui appartient au plan $\mathscr{P}$ et dont les trois coordonnées sont des entiers relatifs.
   a. Démontrer que z_0 est pair.
   b. On pose $z_0=2p$ où p est un entier relatif.
   Prouver que le couple $(x_0\,;\,y_0)$ est solution de l'équation (E_p).
   c. En utilisant la question 1., déterminer l'ensemble des points du plan $\mathscr{P}$ à coordonnées entières.

3. A tout point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$, on associe le point M' de coordonnées $(x'\,;\,y'\,;\,z')$ avec

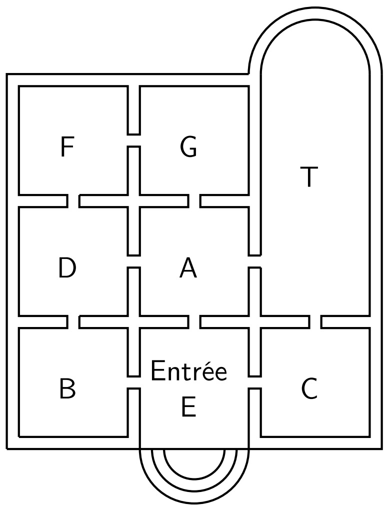
$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31&75&180\\56&41&-144\\28&-30&29\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

   a. Montrer que $6x'+8y'-z'=101(6x+8y-z)$.
   b. En déduire que si le point M est un point du plan $\mathscr{P}$, alors le point M' est aussi un point du plan $\mathscr{P}$.
   c. Soit Δ la droite perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par O.
   Montrer que si le point M appartient à Δ, alors le point M' appartient aussi à Δ.

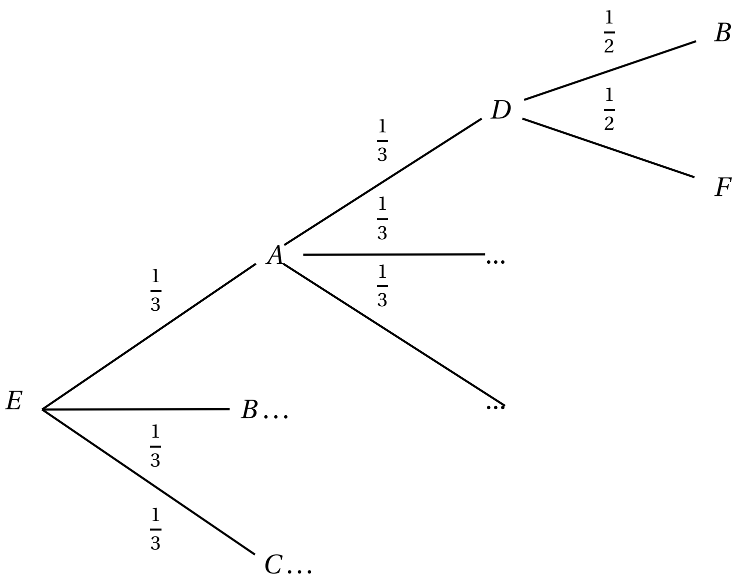
Exercice 3 (sur 5 points) - commun à tous les élèves

Le directeur d'un musée, dont le plan est fourni ci-dessous, organise une exposition.
Afin de prévoir la fréquentation des salles, il décide d'imaginer le parcours d'un visiteur, pris au hasard, en faisant les hypothèses suivantes :

- Le visiteur passe *au hasard* d'une salle à une salle voisine.
- Pour sortir d'une salle, il franchit de manière équiprobable n'importe quelle autre porte que celle qu'il a utilisée pour entrer.
  Dans le parcours du visiteur, le directeur ne s'intéresse qu'aux quatre premières salles traversées, l'entrée E étant comprise dans celles-ci. Un trajet par ces quatre premières salles est codé par un mot de quatre lettres, commençant par la lettre E. Par exemple :
- Si le visiteur passe successivement par les salles E, B, D, F, on codera son trajet par le mot EBDF.
- Le trajet codé EBDB est impossible avec les hypothèses choisies.



1. On considère un visiteur, pris au hasard, devant effectuer un trajet selon les hypothèses précédentes.
   a. Sur la copie, reproduire et compléter l'arbre pondéré des différents trajets possibles pour ce visiteur. **Attention, toutes les branches de l'arbre n'ont volontairement pas été dessinées.**



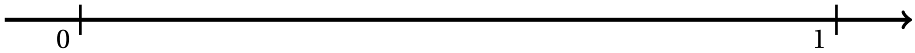
   b. Calculer la probabilité du parcours codé EBDF.
   c. Déterminer la probabilité p_1 de l'évènement : « La quatrième salle du trajet est F ».
   d. Pour des raisons techniques, le directeur installe les œuvres les plus intéressantes dans la salle T. Montrer la probabilité p_2 de l'évènement « Le trajet passe par la salle T »est $\frac{4}{9}$

2. Le directeur imagine dix visiteurs pris au hasard, effectuant chacun un trajet, de manière indépendante et selon les hypothèses précédentes. On appelle X la variable aléatoire qui, aux dix visiteurs, associe le nombre de leurs trajets passant par la salle T.
   a. Quelle est la loi suivie par X ?
   b. Calculer la probabilité de l'évènement (X = 1).
   c. Calculer la probabilité que deux visiteurs au moins passent par la salle T. (Donner le résultat arrondi au millième.)
3. Le directeur décide d'obliger les visiteurs à se diriger, après l'entrée, vers la salle A, les hypothèses précédentes demeurant pour la suite des trajets. Il pense ainsi augmenter la probabilité que deux visiteurs au moins, sur les dix, passent par la salle T. Prouver qu'il a tort.

Exercice 4 (sur 5 points) - commun à tous les élèves

Sur une droite graduée de repère $(O\,;\,I)$, M_0 et M_1 sont les points d'abscisses 0 et 1.
On définit une suite de points M_n de la façon suivante :
pour tout entier naturel n, M_{n+2} est le milieu du segment $[M_nM_{n+1}]$.

1. Sur la droite graduée ci-dessous, placer les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5.



2. Pour tout entier naturel n, x_n désigne l'abscisse du point M_n.

   a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n$$

   b. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+2} - x_{n+1} = -\frac{1}{2}\left(x_{n+1} - x_n\right).$$

3. (v_n) est la suite définie pour tout entier n de $\mathbb{N}$ par $v_n = x_{n+1} - x_n$.

   a. Déduire de la question précédente la nature de la suite (v_n).

   b. Calculer v_0. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

4. (w_n) est la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par : $w_n = x_{n+1} + \dfrac{1}{2}x_n$.

   a. Démontrer que la suite (w_n) est constante.

   b. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

5. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n - v_n = \dfrac{3}{2}x_n$.
   En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

6. En déduire que la suite (x_n) est convergente.
   Que peut-on en déduire pour la suite de points (M_n) ?