BACCALAURÉAT BLANC

février 2013

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5
La page 5 comporte une annexe et est à rendre avec la copie

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée, mais pas le prêt entre candidats

Le candidat doit traiter les exercices I, II, III et l'exercice IV en fonction de l'enseignement de spécialité suivi.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

I

Partie A

1. **Restitution organisée de connaissance**

   L'objet de cette question est de démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$.

   On suppose connus les résultats suivants :

   - La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée
   - $\mathrm{e}^0=1$
   - Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x>x$
   - Soit deux fonctions v et w définies sur l'intervalle $[A\ ;\ +\infty[$, où A est un réel positif.

   Si pour tout x de $[A\ ;\ +\infty[$, $v(x)\leqslant w(x)$ et si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}v(x)=+\infty$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}w(x)=+\infty$.

   a. Soit φ la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $\varphi(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{x^2}{2}$.

   Montrer que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $\varphi(x)\geqslant 1$.

   b. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

   a. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

On fait absorber à un animal un médicament dosé à 1 mg de principe actif. Ce médicament libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. On appelle $g(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant t exprimé en heures ($t\geqslant 0$).

On constate expérimentalement que la vitesse de libération $g'(t)$ du médicament dans le sang vérifie l'égalité, pour tout $t\geqslant 0$, :

$$g'(t)=-\frac{1}{2}\left[g(t)-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right].$$

1. Vérifier que toutes les fonctions $g_k : t\mapsto \dfrac{t}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}+k\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$, $k\in\mathbb{R}$, vérifient l'égalité précédente, pour tout $t\geqslant 0$.
2. On suppose qu'à l'instant $t=0$, la quantité de principe actif présente dans le sang est nulle. Montrer alors que la fonction g_k solution est la fonction f de la partie A.
3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Affecter la valeur 3 à la variable n.
Traitement	Tant que $f(n)>0,1$
	n prend la valeur $n+1$.
	Fin Tant que
Sortie	Afficher la valeur de n.

   où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

   a. À l'aide de la question 2. a. de la **partie A**, expliquer pourquoi il est certain que cet algorithme donne une valeur en sortie.

   b. Quelle est la valeur n_0 de la variable n obtenue à la sortie de l'algorithme ?

   c. L'absorption du médicament par l'animal a lieu un matin à 8 h. À quelle question cet algorithme permet-il de répondre ?

II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

On désigne par A le point d'affixe i et par f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z-\mathrm{i}}{\overline{z}+\mathrm{i}}.$$

1. Calculer l'affixe du point B$'$, image du point B d'affixe $2-\mathrm{i}$ par l'application f.
   Placer les points B et B$'$ sur une figure que l'on fera sur la copie.
2. Démontrer que l'application f n'admet pas de point invariant. On rappelle qu'un point invariant est un point confondu avec son image.
3. **a.** Vérifier que, pour tout nombre complexe z, $\overline{z-\mathrm{i}} = \overline{z}+\mathrm{i}$.
   b. Démontrer que $\mathrm{O}M' = 1$ et interpréter géométriquement ce résultat.
   c. Démontrer que pour tout point M distinct de A,
   $$\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = 2\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) + 2k\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$
   d. En déduire une méthode de construction de l'image M' d'un point quelconque M distinct de A.
4. Soit (d) la droite passant par le point A et dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
   a. Dessiner la droite (d).
   b. Déterminer l'image par l'application f de la droite (d) privée du point A.

III

Au cours d'une séance, un joueur de tennis s'entraîne à faire des services.

Pour tout entier naturel non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n-ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.

Soit x_n la probabilité de R_n et y_n celle de $\overline{R_n}$.

La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à $0,7$.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées

– si le joueur réussit le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut $0,8$;
– si le joueur ne réussit pas le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut $0,7$.

1. On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de services réussis sur ces deux premiers services.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X. (On pourra utiliser un arbre de probabilité)
   b. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
2. On s'intéresse maintenant au cas général.
   a. Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $x_{n+1} = 0,1x_n + 0,7$.
3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 9x_n - 7$.
   Dans ces deux questions, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
   a. Déterminer la nature de la suite (u_n).
   b. En déduire la limite de la suite (x_n).

IV Exercice pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$.

1. Sur l'annexe , on a tracé la courbe d'équation $y = \frac{x}{1+2x}$.
   a. Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite.
   b. Conjecturer la limite de la suite (u_n).
   On cherche à déterminer la limite de la suite (u_n).
2. **Méthode 1.**
   a. Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1+2x}$.
   Dresser le tableau des variations complet de f.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_{n+1} \leqslant u_n$.
   c. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. **Méthode 2**
   On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{1}{u_n} + 1$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique. On précisera son premier terme et sa raison.
   b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c. En déduire la limite de la suite (u_n).

IV Exercice pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :
« *Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre* 1 *peuvent-ils être premiers* ? »
Pour tout entier naturel $p \geqslant 2$, on pose $N_p = 1\ldots1$ où 1 apparaît p fois.
On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \cdots + 10^0$.

1. Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, $N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?
2. Prouver que $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?
3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.
   On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,
   $$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\right).$$
   a. On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
   Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.
   b. On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
   Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.
   c. On suppose p non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1.
   En déduire que N_p est divisible par N_k.
4. Énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier.
   Cette condition est-elle suffisante ?

Annexe à l'exercice IV