BACCALAURÉAT BLANC

Session 2010

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet comporte cinq pages, numérotées de 1 à ??

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter les exercices 1, 3 et 4
et l'exercice 2 correspondant à sa spécialité.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 5 points

Pour tous les candidats Partie A

1. Déterminer le nombre complexe α tel que $\left\{\begin{array}{lcl}\alpha(1+\mathrm{i}) & = & 1+3\mathrm{i}\\ \mathrm{i}\alpha^2 & = & -4+3\mathrm{i}\end{array}\right.$
2. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^2-(1+3\mathrm{i})z+(-4+3\mathrm{i})$.
   Montrer que $f(z)$ s'écrit sous la forme $(z-\alpha)(z-\mathrm{i}\alpha)$.
   En déduire les solutions sous forme algébrique de l'équation $f(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$, unité graphique : 5 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2+\mathrm{i}$ et $b = -1+2\mathrm{i}$.
   Placer A et B dans le repère et compléter la figure au fur et à mesure.
   Montrer que $b = \mathrm{i}a$, en déduire que le triangle OAB est un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. On considère le point C d'affixe $c = -1+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point D tel que le triangle OCD soit un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{\text{OC}},\ \overrightarrow{\text{OD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
   On pourra conjecturer l'affixe de D à l'aide de la figure pour traiter la question suivante.
3. Soit M le milieu de [CB]. On appelle $z_{\overrightarrow{\text{OM}}}$ et $z_{\overrightarrow{\text{DA}}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{\text{OM}}$ et $\overrightarrow{\text{DA}}$.
   Prouver que : $\dfrac{z_{\overrightarrow{\text{OM}}}}{z_{\overrightarrow{\text{DA}}}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.
4. Donner une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{DA}},\ \overrightarrow{\text{OM}}\right)$.
5. Prouver que $\text{OM} = \dfrac{1}{2}\text{DA}$.
6. On appelle J, K et L les milieux respectifs des segments [CD], [DA] et [AB].
   On admet que le quadrilatère JKLM est un parallélogramme. Démontrer que c'est un carré.

Exercice 2 — 5 points

Pour les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité

1. La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.
   a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan **en annexe**, la droite d'équation $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{23}{27}$, la droite d'équation $y = x$ et le point A de coordonnées (2 ; 0). Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geqslant \dfrac{23}{18}$.
   c. Étudier la monotonie de la suite u.
   d. Montrer que la suite u est convergente vers un réel ℓ.
   e. Trouver la valeur de ℓ en justifiant votre réponse.
2. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :
   $$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) \text{ c'est-à-dire que } \frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$
   b. La suite v est définie par $v_n = 1,2777\cdots7$ avec n décimales consécutives égales à 7.
   Ainsi $v_0 = 1,2$, $v_1 = 1,27$ et $v_2 = 1,277$.
   En utilisant le **a** démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).
3. La suite u définie au **1** et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.

Exercice 2 — 5 points

Pour les candidats suivant l'enseignement de spécialité

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
   a. Pour tout élément a de A_7 recopier le tableau suivant et donner l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1 \pmod 7$.

a	1	2	3	4	5	6
y						6

   b. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5 \pmod 7$ équivaut à $x \equiv 4 \pmod 7$.
   c. Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0 \pmod 7$ sont les multiples de 7.
2. Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $A_p = \{1 ; 2 ; \dots ; p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.
   a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1 \pmod p$.
   b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p, de l'équation $ax \equiv 1 \pmod p$.
   c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0 \pmod p$ si et seulement si x est un multiple de p où y est un multiple de p.
   d. Application : $p = 31$. Résoudre dans A_{31} les équations : $2x \equiv 1 \pmod{31}$ et $3x \equiv 1 \pmod{31}$.
   À l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31}$.

Exercice 3 — 4 points

Pour tous les candidats

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$:

(E) : $y' + (1 + \tan x)y = \cos x$
(E_0) : $y' + y = 1$.

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).
2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ et telles que $f(x) = g(x)\cos x$.
   Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).
3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

Exercice 4 **6 points**

Pour tous les candidats Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 10 cm).

Partie A

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

   c. Construire Γ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

2. **a.** Montrer que, pour tout réel m de $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

   b. Dans le cas où $m = \dfrac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions (avec $\alpha < \beta$).
   Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   c. Résoudre l'équation $f(x) = m$ dans le cas où $m = 0$ et $m = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & \alpha \\ u_{n+1} & = & u_n\mathrm{e}^{-u_n},\ \text{pour tout entier naturel } n \end{array}\right.$$

   où α est le réel défini à la question **A. 2. b.**

   a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

   c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

2. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln u_n$.

   a. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $u_n = w_n - w_{n+1}$.

   b. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Montrer que $S_n = w_0 - w_{n+1}$.

   c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0 ($v_0 > 0$) et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n\mathrm{e}^{-v_n}$.
   Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait $u_n = v_n$?
   Si oui, préciser laquelle.

Annexe de l'exercice 2 pour ceux qui ne suivent pas l'enseignement de spécialité