BACCALAURÉAT BLANC

Session 2011

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter les exercices 1, 2, 3, ainsi que l'exercice 4 correspondant à sa spécialité.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 3 points

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$t_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

   Proposition 1 : Pour tout entier naturel n, $t_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \leqslant w_n \leqslant v_n.$$

   Proposition 2 : Si les suites (u_n)et (v_n) sont adjacentes alors la suite (w_n) est convergente.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \ln\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.

   Proposition 3 : La suite (u_n) est convergente.

Exercice 2 — 7 points

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   c. Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$.

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

La figure est donnée en annexe.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathscr{C})$ de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$, P le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$, Q le point de coordonnées $(0\ ;\ f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Le point M a pour abscisse α.
   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathscr{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

Exercice 3 — 5 points

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

1. a. Étudier le sens de variation de la fonction φ sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
   b. Calculer $\varphi(\mathrm{e})$. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
   c. Déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$

   On note f' la fonction dérivée de f.
   a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \geqslant 1$ on a : $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}$.
   b. Déduire de la question 1. le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
   c. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ on a :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln x}{x^2}.$$

   d. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 4 pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = -2i, \quad z_B = -\sqrt{3}+i \quad \text{et} \quad z_C = \sqrt{3}+i.$$

1. a. Écrire z_A, z_B et z_C sous forme exponentielle.
   b. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.
   c. Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.
2. a. Écrire le quotient $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
   b. En déduire la nature du triangle ABC .
3. On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant $\dfrac{\pi}{3}$ radians.
   a. Montrer que le point O′, image de O par r, a pour affixe $-\sqrt{3}-i$.
   b. Démontrer que les points C et O′ sont diamétralement opposés sur le cercle Γ.
   c. Tracer l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.
   d. Justifier que les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B.
4. a. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que

$$|z| = \left|z+\sqrt{3}+i\right|.$$

   b. Montrer que les points A et B appartiennent à (E).

Exercice 4 pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité 5 points

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1\ ;\ 46]$.

1. On considère l'équation

$$(E): \quad 23x+47y=1$$

   où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Donner une solution particulière $\left(x_0,\ y_0\right)$ de (E).
   b. Déterminer l'ensemble des couples $(x,\ y)$ solutions de (E).
   c. En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1 \quad (47)$.
2. Soient a et b deux entiers relatifs.
   a. Montrer que si $ab \equiv 0 \quad (47)$ alors $a \equiv 0 \quad (47))$ ou $b \equiv 0 \quad (47)$.
   b. En déduire que si $a^2 \equiv 1 \quad (47)$ alors $a \equiv 1 \quad (47)$ ou a $a \equiv -1 \quad (47)$.
3. a. Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que $p \times q \equiv 1 \quad (47)$.
   Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à A tel que $p \times inv(p) \equiv 1 \quad (47)$.
   Par exemple :
   $inv(1) = 1$ car $1 \times 1 \equiv 1 \quad (47)$, $inv(2) = 24$ car $2 \times 24 \equiv 1 \quad (47)$,
   $inv(3) = 16$ car $3 \times 16 = \equiv 1 \quad (47)$.
   b. Quels sont les entiers p de A qui vérifient $p = inv(p)$?
   c. Montrer que $46! \equiv -1 \quad (47)$.

ANNEXE (à l'exercice 2)

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie.