TS : TD sur la forme exponentielle d'un nombre complexe

I

Écrire sous forme d'exponentielle complexe les nombres suivants : $\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$; $-3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$; $-2\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$

II

En utilisant la notation exponentielle, retrouver les formules de trigonométrie donnant les nombres suivants en fonction de $\cos\theta$ ou $\sin\theta$.

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

c) $\cos(\pi-\theta)$; $\sin(\pi-\theta)$.

III

On pose $j=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Donner la forme exponentielle de j.
2. En déduire j^3 puis la somme $1+j+j^2$.
3. Montrer que $\frac{1}{j}=\overline{j}=j^2$.
4. Quelle est la nature du triangle ABC où A, B et C ont respectivement pour affixes les nombres 1, j et j^2 ?

IV

Quelle est la forme algébrique de $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2014}$?

V

On donne les identités remarquables suivantes :
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

a) Rappeler pourquoi, pour tout x réel et tout entier naturel n, on a : $\cos(nx)+\mathrm{i}\sin(nx)=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n$ (formule de Moivre)

b) En déduire l'expression de $\cos(2x)$ et de $\sin(2x)$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.

c) Trouver l'expression de $\cos(3x)$ et de $\sin(3x)$.

d) Exprimer $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ et de $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$.

e) En déduire l'expression de $\cos^2 x$ et de $\sin^2 x$ en fonction de $\cos 2x$.

f) En déduire l'expression de $\cos^3 x$ en fonction de $\cos 3x$ et de $\cos x$ puis $\sin^3 x$ en fonction de $\sin x$ et $\sin(3x)$.

VI Une somme de cosinus

θ est une nombre réel.

a) Montrer que $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=-2\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ (il faut faire apparaître $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ donc on factorisera par …)

b) Montrer alors que :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{11}}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\frac{\pi}{11}}+\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\frac{\pi}{11}}+\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\frac{\pi}{11}}+\mathrm{e}^{9\mathrm{i}\frac{\pi}{11}}=\frac{\sin\frac{5\pi}{11}}{\sin\frac{\pi}{11}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{11}}.$$

c) En déduire la valeur de :

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}.$$