Terminale S : Initiation aux primitives

Table des matières

I Notion de primitive

I.1 Primitive de f sur un intervalle I

Définition

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
F est une primitive de f sur I si, et seulement si :

- la fonction F est dérivable sur I et a pour dérivée f.
- -$\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple :

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $f : x \mapsto$ sur $\mathbb{R}$, car pour tout x de $\mathbb{R}$, $F'(x) = x = f(x)$.

Remarque : $G : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + 5$ est aussi une primitive de f car $G' = f$.
Une primitive n'est pas unique.

Propriété

Soit F une primitive d'une fonction f et k un réel.
$F + k$ est aussi une primitive de f.

Démonstration :
$(F + k)' = F' + 0 = F' = f$ donc $F + k$ est bien une primitive de f.

Propriété réciproque

Soient F et G deux primitives d'une fonction f.
Alors, il existe un réel k tel que $G = F + k$.

Démonstration :
Par hypothèse, $F' = f$ et $G' = g$.

Alors : $(G-F)' = G' - F' - f - f = 0$.
$G-F$ est une fonction de dérivée nulle, donc une fonction constante.
Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G - F = k$ donc $G = F + k$.

Remarque : il suffit de connaître une primitive pour connaître toutes les primitives d'une fonction.

Remarque : il y a des fonctions dont on ne sait pas exprimer une primitive à l'aide de fonctions usuelles, comme $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^4}$.

Vous verrez en physique que la détermination de la constante se fait souvent à partir des conditions initiales, c'est-à-dire les conditions à l'instant $t = 0$.

II Calculs de primitives

II.1 Primitives usuelles

Par lecture inverse du tableau des dérivées des fonctions usuelles, on obtient les résultats suivants :
(y compris les fonctions non encore étudiées, comme la fonction logarithme népérien ln et sa réciproque, la fonction exponentielle) :

Fonction	Une primitive	Validité
$f(x) = a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$	$F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty\,:\,0[$ ou $]0\,:\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x- = \tan x$	$\left](2k-1)\dfrac{\pi}{2};(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right[$, $k \in \mathbb{Z}$

II.2 Primitives et opérations :

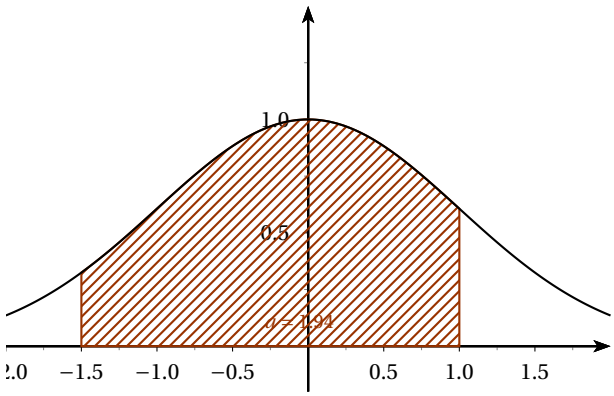
Soient u et v deux fonctions admettant des primitives respectives U et V sur un intervalle I et g une fonction admettant une primitive G sur un intervalle J contenant l'intervalle $u(I)$.
On note u la dérivée de u.

Fonction	une primitive	validité
$f = \alpha u + \beta v((\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2)$	$F = \alpha U + \beta V$	I
$f = u' \times g \circ u$	$F = G \circ u$	I
$f = u' u^n (n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	I
$f = \dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	u ne s'annule pas sur I
$f = \dfrac{u'}{u^n},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$	$F = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	u ne s'annule pas sur I
$f = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$F = \sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$f = u'\mathrm{e}^u$	$F = \mathrm{e}^u$	ensemble de définition de$u$
$f = u'\cos(u)$	$\sin(u)$	I
$f = u'\sin(u)$	$cos(u)$	I

III Calculs d'aires

Le calcul intégral permet (entre autre) de calculer l'aire comprise entre une courbe représentative d'une fonction positive, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Exemple : calculer l'aire hachurée entre les droites d'équations $x = -1,5$ et $x = 1$:



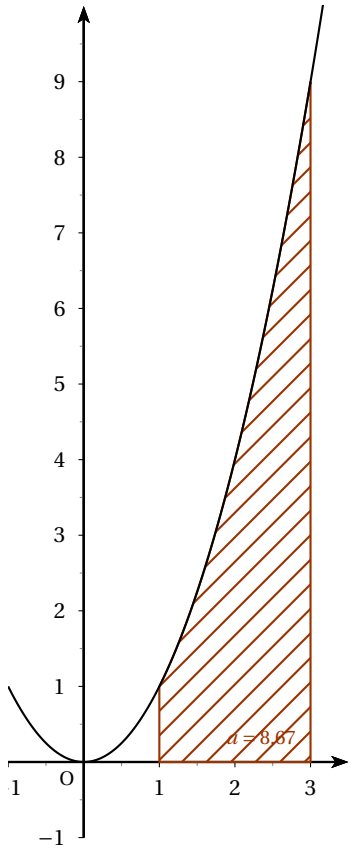
On verra le résultat « magique » suivant :
L'aire se définit à l'aide d'une intégrale et vaut :

$$\boxed{\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$$

où F est n'importe quelle primitive de f.
On lit « intégrale de a à b de f(x) dx »

Le terme **dx** correspond à une variation infinitésimale de la variable ; il est obligatoire (ne serait-ce que pour avoir une formule homogène à une aire (produit de deux longueurs) ; nous en reparlerons de manière plus détaillée dans le cours...

Exemple : Calculer l'aire comprise entre la parabole représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.



Une primitive de f est $F = x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3$.

L'aire vaut $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = F(3) - F(1) = \dfrac{26}{3}$ unités d'aire.