Exercices de révision (TS)

I Probabilités

I.1 Exercice bac ES Pondichéry avril 2014

Les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A

Une société s'est intéressée à la probabilité qu'un de ses salariés, choisi au hasard, soit absent durant une semaine donnée de l'hiver 2014.

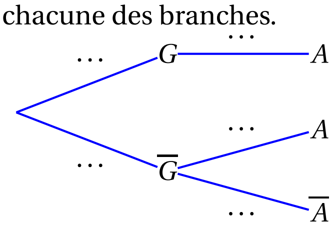
On a évalué à 0,07 la probabilité qu'un salarié ait la grippe une semaine donnée. Si le salarié a la grippe, il est alors absent.

Si le salarié n'est pas grippé cette semaine là, la probabilité qu'il soit absent est estimée à 0,04.

On choisit un salarié de la société au hasard et on considère les évènements suivants :

— G : le salarié a la grippe une semaine donnée ;
— A : le salarié est absent une semaine donnée.

1. Reproduire et compléter l'arbre en indiquant les probabilités de chacune des branches.



2. Montrer que la probabilité $p(A)$ de l'évènement A est égale à 0,107 2.
3. Pour une semaine donnée, calculer la probabilité qu'un salarié ait la grippe sachant qu'il est absent. Donner un résultat arrondi au millième.

Partie B

On admet que le nombre de journées d'absence annuel d'un salarié peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 14$ et d'écart type $\sigma = 3,5$.

1. Justifier, en utilisant un résultat du cours, que $p(7 \leqslant X \leqslant 21) \approx 0,95$.
2. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'un salarié comptabilise au moins 10 journées d'absence dans l'année.

Partie C

Une mutuelle déclare que 22 % de ses adhérents ont dépassé 20 journées d'absence au travail en 2013.

Afin d'observer la validité de cette affirmation, un organisme enquête sur un échantillon de 200 personnes, choisies au hasard et de façon indépendante, parmi les adhérents de la mutuelle.

Parmi celles-ci, 28 ont comptabilisé plus de 20 journées d'absence en 2013.

Le résultat de l'enquête remet-il en question l'affirmation de la mutuelle ? Justifier la réponse. On pourra s'aider du calcul d'un intervalle de fluctuation.

I.2

Une usine utilise une machine automatique pour remplir des sachets de sel. Sur chaque sachet, le poids net de sel annoncé est 200 g. Toutefois, une étude statistique montre qu'en fait, le poids net de sel par sachet suit une loi normale de moyenne 201,6 g et d'écart type 0,9 g.

1. Quelle est la probabilité que le poids d'un sachet de sel soit inférieur au poids net annoncé ?
2. Sur quelle moyenne faut-il régler la machine pour que moins de 3 % des sachets de sel aient un poids de sel inférieur à 200 g ?

I.3

La sélection chez les vaches laitières de race « Française Frisonne Pis Noir ».

La production laitière annuelle en litres des vaches laitières de la race FFPN peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X , de loi normale de moyenne $\mu = 6\,000$ et d'écart-type $\sigma = 400$.

La fonction g désigne la fonction de densité de cette loi normale .

1. Afin de gérer au plus près son quota laitier (production maximale autorisée), en déterminant la taille optimale de son troupeau, un éleveur faisant naître des vaches de cette race souhaite disposer de certaines probabilités.
   (a) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5 800 litres par an.
   (b) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5 900 et 6 100 litres de lait par an.
   (c) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6250 litres par an.
2. Dans son futur troupeau, l'éleveur souhaite conn aître :
   (a) la production maximale prévisible des 30 % de vac hes les moins productives du troupeau.
   (b) la production minimale prévisible des 20 % des vaches les plus productives.

I.4 Durée de vie d'un appareil

La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus.

Les spécifications impliquent que 80 % de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5 % de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1. Quelles sont les valeurs de μ et σš ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours ?

II Démonstration par récurrence

II.1

Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

III Nombres complexes

III.1 Nouvelle-Calédonie novembre 2013

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. **Proposition** : Pour tout entier naturel n
   $(1+\text{i})^{4n} = (-4)^n$.
2. Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right)=0$ où z désigne un nombre complexe.
   Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.
3. **Proposition** : Pour tout nombre réel α, $1+\text{e}^{2i\alpha} = 2\text{e}^{\text{i}\alpha}\cos(\alpha)$.
4. Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = \dfrac{1}{2}(1+\text{i})$ et M_n le point d'affixe $(z_{\text{A}})^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Proposition : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.
5. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
   Proposition : $1+\text{j}+\text{j}^2=0$.

III.2 Asie juin 2013 (complexes et géométrie dans l'espace)

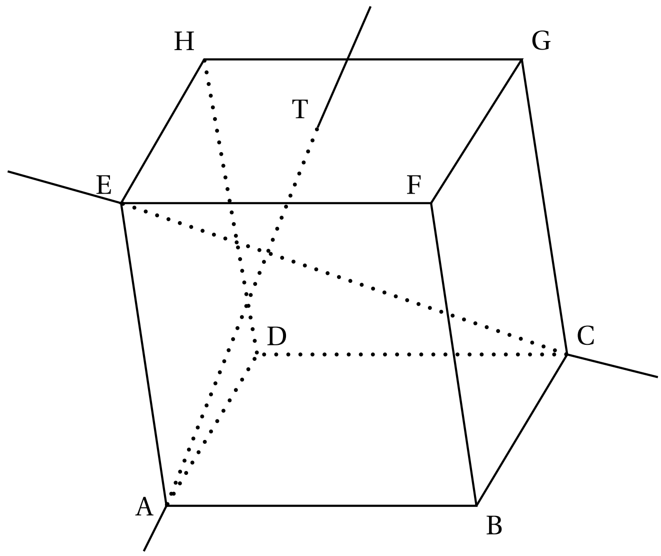
Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes. Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a=2+2\text{i},\quad b=-\sqrt{3}+\text{i},\quad c=1+\text{i}\sqrt{3},\quad d=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\quad \text{et}\quad e=-1+$$

1. **Affirmation 1** : les points A, B et C sont alignés.
2. **Affirmation 2** : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.
3. Dans cette question, l'espace est muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.
   On considère les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0) et K(0 ; 0 ; 1).
   Affirmation 3 : la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2-t\\ y &=& 6-2t\\ z &=& -2+t\end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$, coupe le plan (IJK) au point $\text{E}\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.
4. Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF].



Affirmation 4 : les droites (AT) et (EC) sont orthogonales