TS : AP1 - Différents types de raisonnements utilisés en mathématiques

Notation : un énoncé mathématique (vrai ou faux) est appelé **proposition**.

Exemples :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ est une proposition vraie.
- Tout triangle est rectangle est une proposition fausse.
- Une équation n'est pas une proposition

Tout ce qui suit est basé sur un principe fondamental des mathématiques : **« le principe du tiers exclu »** : une propriété est soit vraie, soit fausse.
Alors, si une propriété est vraie, sa négation est fausse et réciproquement.

I Quantificateurs

I.1 Quantificateur existentiel

Dans la proposition mathématique
« Il existe (au moins) un réel x tel que $\dfrac{1}{x} > 0$, l'expression « il existe au moins ...tel que » est appelé quantificateur existentiel ; on utilise alors le symbole mathématique $\exists$.
On écrit alors : $\exists x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{x} > 1$.

I.2 Quantificateur universel

Dans la proposition
« Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ », la locution « Pour tout » est appelée quantificateur universel, noté $\forall$.
On écrirait : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

I.3 Négation

La négation d'une proposition « P » est la proposition contraire « non P ». Si l'une est vraie, l'autre est fausse et réciproquement.
La négation de $\forall$ est $\exists$ et réciproquement.
Exemple : Soit la proposition **vraie** : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$.
La proposition contraire (**fausse**) est : $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 < 0$.

I.4 Exercice

Écrire la négation des propositions suivantes et préciser laquelle est vraie.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x+1 > x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{x^2+1} < 1$
3. Tout triangle est rectangle.
4. Tout carré est un losange.
5. Tout nombre premier est impair.
6. Il existe un réel x tel que $x^2+x+1=0$

II Raisonnement par contre-exemple

Exemple : soit la propriété P : « $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+2x+1 \neq 0$. On veut montrer que cette proposition est fausse.
Il est équivalent de montrer que la proposition contraire non P $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2+2x+1=0$ est vraie.
Autrement dit, il suffit d'exhiber un réel x rendant nulle l'expression x^2+2x+1.
Donner ce contre-exemple.

III Raisonnement par contraposée

Soit (P) la proposition mathématique vraie : Si A est vraie, alors B est vraie, notée aussi A$\Rightarrow$ B.

Exemple : (Théorème de Pythagore :) Si ABC est un triangle rectangle en A alors $AB^2+AC^2=BC^2$.

Définition

La proposition contraposée de (P) ou plus simplement la contraposée de (P) est la proposition vraie :
Si B n'est pas vraie, alors A n'est pas vraie notée aussi (Non B)$\Rightarrow$ (Non A).

Exemple : Contraposée du théorème de Pythagore :
Si, dans le triangle ABC, $AB^2+AC^2 \neq BC^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle.

Remarque : ne pas confondre avec la réciproque du théorème de Pythagore :

Si, dans le triangle ABC, $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors le triangle ABC est rectangle.

Exercice :

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, n impair $\Rightarrow n^2$ impair.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 impair $\Rightarrow n$ impair.
3. Comment traduire ces deux propriétés en une seule ?

Exercice : Démontrer que la proposition $a \neq b \Rightarrow a^2 = b^2$ est fausse.

IV Raisonnement par l'absurde

Définition :

Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement logique, consistant soit ‡ démontrer la vérité d'une proposition en prouvant l'absurdité de la proposition contraire, soit ‡ montrer la fausseté d'une proposition en déduisant logiquement des conséquences absurdes.

Exemple : On souhaite démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
On va donc essayer de voir ce qu'il se passe si on considére que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, c'est-‡-dire le quotient de deux entiers relatifs .

Si $\sqrt{2}$ est rationnel, alors il peut se mettre sous la forme d'un quotient d'entiers, donc il existe deux entiers p et q ($q \neq 0$) tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec PGCD(p ; q) = 1 (p et q sont premiers entre eux, c'est-‡-dire n'ont aucun facteur premier commun).

Si $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, alors $p = \sqrt{2} \times q$ donc $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est un nombre pair et donc p est pair. (voir exemple sur la contraposée).
Puisque p est un nombre pair, alors il existe un entier naturel k tel que $p = 2k$.
On a donc $(2k)^2 = 2q^2$ donc $4k^2 = 2q^2$ donc $q^2 = 2k^2$, donc q^2 est pair et q est pair.(voir exemple sur la contraposée).
Or p et q ne peuvent pas Ítre pairs tous les deux car p et q sont premiers entre eux donc l'hypothèse est fausse : $\boxed{\sqrt{2} \text{ n'est pas un rationnel mais un irrationnel.}}$

Exercice : démontrer que l'ensemble I des rationnels strictement supérieurs ‡ 1 n'a pas de plus petit élément

V Raisonnement par récurrence

Nous avons vu ce type de raisonnement en cours.

VI Raisonnement par disjonction des cas

Définition :

Lors d'un raisonnement par disjonction des cas, on étudie tous les cas possibles en faisant au préalable un tri pour restreindre le nombre de cas ‡ étudier.

Exemple : Démontrer que pour tout entier naturel n, le produit $n(n+1)$ est divisible par 2.

- Premier cas : n est pair. $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
  Alors : $n+1 = 2k+1$ et $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2[k(2k+1)] = 2m$ avec $m = k(2k+1) \in \mathbb{N}$.
  $n(n+1)$ est pair.
- Deuxième cas : n est impair. $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.
  Alors : $n+1 = 2k+2 = 2(k+1)$ et $n(n+1) = (2k+1) \times 2(k+1) = 2[(k+1)(2k+1)] = 2p$ avec $p = (k+1)(2k+1) \in \mathbb{N}$.
  $n(n+1)$ est pair.

On en déduit que, dans tous les cas, $n(n+1)$ est pair.

Exercice : Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n + 1$ est pair (considérer le chiffre des unités de 3^n)