TS : devoir sur feuille n° 4

I

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

Partie A :

On note P le point d'affixe $p = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, Q le point d'affixe $q = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, et K le point d'affixe -1.

1. (a) Montrer que les points P et Q appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 1.
   (b) Faire une figure et construire les points P et Q.
2. (a) Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $|z| = |z+1|$. Représenter cet ensemble sur la figure.
   (b) Montrer que P et Q sont les points d'intersection de l'ensemble D et du cercle Γ.

Partie B :

On considère trois nombres complexes non nuls a, b et c. On note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.

On suppose que l'origine O du repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ est à la fois le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

1. (a) Montrer que $|a| = |b| = |c|$.
   En déduire que $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{c}{a}\right| = 1$.
   (b) Montrer que $a + b + c = 0$.
   (c) Montrer que $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{b}{a} + 1\right| = 1$.
   (d) En utilisant la partie A, en déduire que $\frac{b}{a} = p$ ou $\frac{b}{a} = q$.
2. Dans cette question, on admet que $\frac{b}{a} = p$ et $\frac{c}{a} = q$.
   (a) Montrer que $\frac{q-1}{p-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   (b) Montrer que $\frac{q-1}{p-1} = \frac{c-a}{b-a}$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes la nature du triangle ABC.

II

Laura débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner que de perde la première partie.

On admet que si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la suivante est 0,6 ; si elle perd une partie, la probabilité qu'elle perde la suivante est 0,7.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note G_n l'événement « Laura gagne la n^{e} partie ».

1. Calculer les probabilités $p\left(\mathrm{G}_n\right)$ et $p\left(\overline{\mathrm{G}_n}\right)$.
2. Pour tout entier $\geqslant 1$, on pose : $x_n = p\left(\mathrm{G}_n\right)$ et $y_n = p\left(\overline{\mathrm{G}_n}\right)$.
   Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$\begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n \end{cases}$$
3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :
   $v_n = x_n + y_n$ et $w_n = 4x_n - 3y_n$.
   (a) a) Prouver que la suite (v_n) est constante.
   (b) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique puis exprimer w_n en fonction de n.
4. (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer x_n en fonction de n.
   (b) Prouver que la suite (x_n) converge vers un nombre que à préciserer.
   Interpréter ce résultat.

III

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels.
	u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n.
	Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{i}$
Sortie :	Afficher u.

   Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.
3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	1 500	2 000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

   À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.

Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$u_{n+1} - u_n = f(n)$$

   où f est la fonction définie dans la partie A.

   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. (a) Soit k un entier strictement positif.

   Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \geqslant 0$.

   En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$.

   Démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ (1).

   (b) Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par $1, 2, \ldots, n$ et démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

   (c) En déduire que pour tout entier strictement positif n, $u_n \geqslant 0$.

3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

IV

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.

L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.

Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.

On considère les évènements suivants :

A : « obtenir 1 en lançant le dé »

B : « obtenir une boule noire ».

1. (a) Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.

   (b) Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\dfrac{3}{8}$.

   (c) Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.

2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

   (a) Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

   (b) Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

   (c) On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X < k)$	0,009 1	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3	0,872 5	0,961 6	0,992 2	0,999 0	0,999 9

   Soit N un entier compris entre 1 et 10. On considère l'évènement : « la personne gagne au moins N parties ».

   À partir de quelle valeur de N la probabilité de cet évènement est-elle inférieure à $\dfrac{1}{10}$?