TS : devoir sur feuille n° 3

I

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

PARTIE A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un entier
	U, V, W sont des réels
	K est un entier
Début :	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
	Tant que $K < N$
	Affecter $K+1$ à K
	Affecter U à W
	Affecter $\frac{2U+V}{3}$ à U
	Affecter $\frac{W+3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U
	Afficher V
Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

PARTIE B

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n).$$

   (b) Pour tout entier naturel n on pose

$$w_n = v_n - u_n.$$

   Montrer que pour tout entier naturel n,

$$w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n.$$

2. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

   (b) Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

   (c) En déduire que tes suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

   En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

II

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2z + 5 = 0.$$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

   On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D o˘ :

$$z_A = 1 + 2\mathrm{i}, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_C = 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}, \quad z_D = \overline{z_C}.$$

   (a) Placer les points A et B dans le repère $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

   (b) Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et donner le résultat sous forme algébrique.

   (c) En déduire la nature du triangle ABC.

3. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.

4. Construire les points C et D dans le repère $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$. Expliquer la construction proposée.

III

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2 - 3\mathrm{i}$, $z_B = \mathrm{i}$ et $z_C = 6 - \mathrm{i}$.

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Partie A

1. Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

2. En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}(z - 2 + 3\mathrm{i})}{z - \mathrm{i}}$$

1. Soit D le point d'affixe $z_D = 1 - \mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point D′ image du point D par f.

2. (a) Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application f est le point d'affixe 2i.

   (b) Démontrer que E est un point de la droite (AB).

3. Démontrer que, pour tout point M distinct du point B, $\mathrm{O}M' = \frac{\mathrm{A}M}{\mathrm{B}M}$.

4. Démontrer que, pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{B}M}, \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

5. Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

6. Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

IV Fonction limite d'une suite de fonctions

Pour tout entier $n \geqslant l$, on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

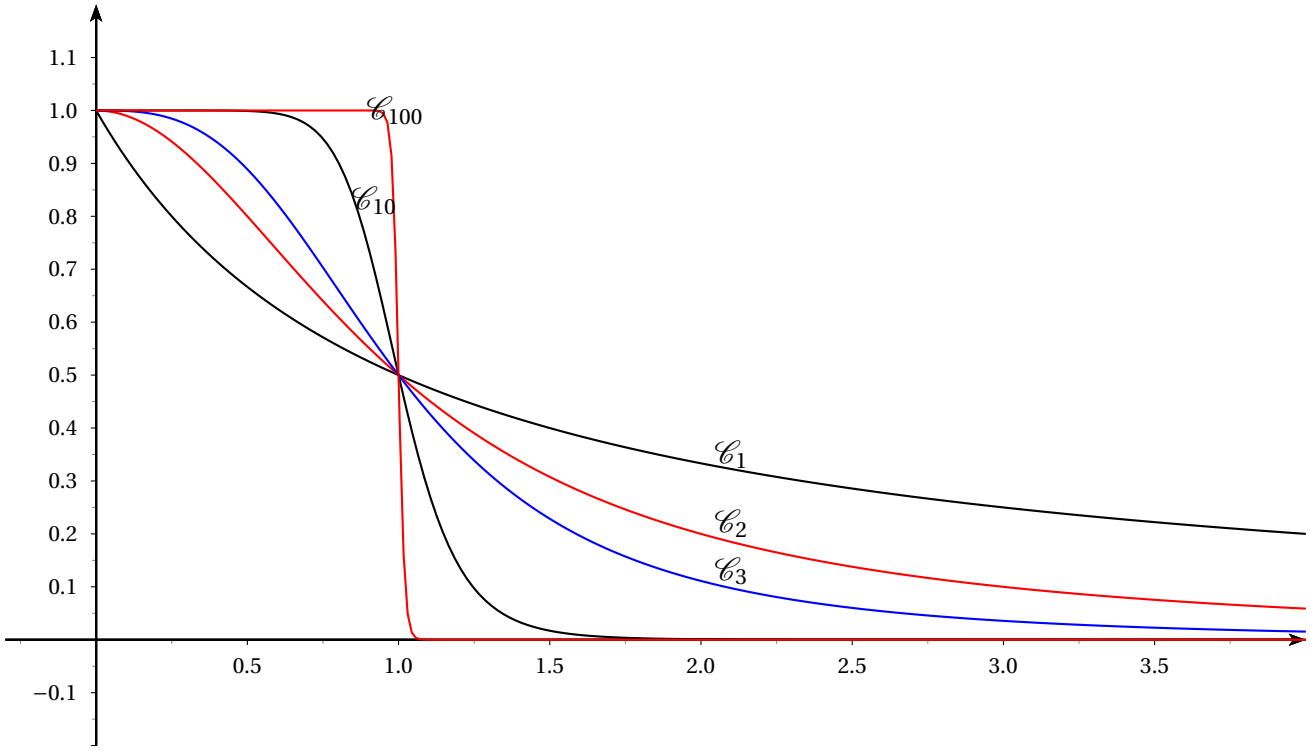
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n.·

1. (a) Déterminer, pour $n \geqslant 1$, les variations de f_n.

   (b) Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_n$ passent toutes par deux points fixes (indépendants de n) que l'on déterminera.

   (c) Soient deux entiers n et m non nuls avec $n < m$.
   Comparer $f_n(x)$ et $f_m(x)$ selon les valeurs de x.
   En déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_m$.

2. On a représenté ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_{10}$ et $\mathscr{C}_{100}$.



   (a) Conjecturer, selon la valeur du réel $x \geqslant 0$, la limite de $f_n(x)$ lorsque que n tend vers $+\infty$.

   (b) Démontrer la conjecture émise à la question précédente.

   (c) Pour tout réel $x \geqslant 0$, on note $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.
   On définit ainsi une fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
   Expliciter la fonction f .

   (d) La fonction f est-elle continue sur $[0\,;\,+\infty[$?