Bac Amérique du Nord juin 2016

Exercice I — 6 points

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :

A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.
2. Justifier que $P(B \cap V) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.
3. Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B.
   A-t-il raison ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre, exprimé en cm, des billes produites par les machines A et B.

1. Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0,055$.
   Vérifier que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien celle trouvée dans la partie A, au centième près.
2. De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type σ', σ' étant un réel strictement positif.
   Sachant que $P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98$, déterminer une valeur approchée au millième de σ'.

Partie C

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.

Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.
   (a) On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.
   (b) Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?
2. Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

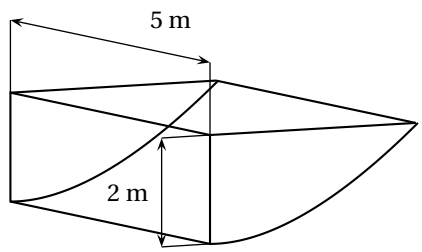
Exercice II — 6 points

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.

Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

Cette cuve est schématisée ci-dessous.

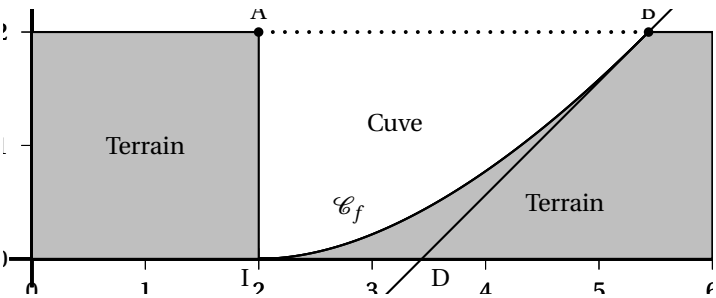


La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 2e] définie par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.

On considère les points A(2 ; 2), I(2 ; 0) et B(2e ; 2).



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

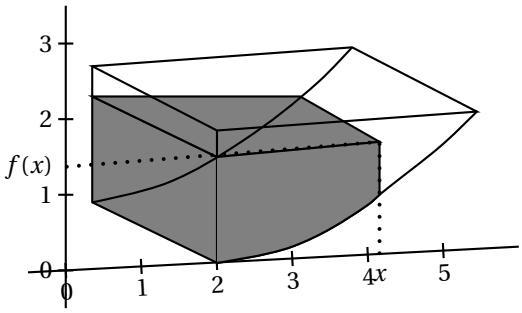
1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.

2. On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite $\mathscr{T}$ avec l'axe des abscisses.
   (a) Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ et en déduire les coordonnées de D.
   (b) On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites d'équations $y = 2$, $x = 2$ et $x = 2\text{e}$.
   S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB.
   Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?
3. (a) Montrer que, sur l'intervalle $[2\,;\,2\text{e}]$, la fonction G définie par
$$G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$$
   est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.
   (b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,2\text{e}]$.
   (c) Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et 2e, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2\,;\,2\text{e}]$,
$$v(x) = 5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right].$$



1. Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?
2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

   On considère l'algorithme ci-contre.

   Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

```
Variables :     a est un réel
                b est un réel
Traitement :    a prend la valeur 2
                b prend la valeur 2 e
                Tant que v(b) − v(a) > 10^−3 faire :
                    c prend la valeur (a + b)/2
                    Si v(c) < V/2, alors :
                        a prend la valeur c
                    Sinon
                        b prend la valeur c
                    Fin Si
                Fin Tant que
Sortie :        Afficher f(c)
```

Exercice III — 3 points

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

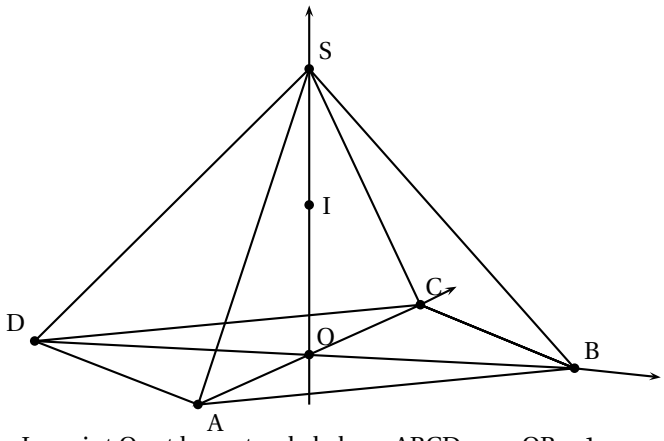
On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe 4i et les points C et D tels que ABCD est un carré de centre O.

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1+\text{i})^n$.

1. Écrire le nombre $1+\text{i}$ sous forme exponentielle.
2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD.

Exercice IV — 5 points

On considère la pyramide régulière SABCD de sommet S constituée de la base carrée ABCD et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base ABCD avec OB = 1.

On rappelle que le segment [SO] est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\text{OB}},\,\overrightarrow{\text{OC}},\,\overrightarrow{\text{OS}}\right)$ est orthonormé.

   Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\text{OB}},\,\overrightarrow{\text{OC}},\,\overrightarrow{\text{OS}}\right)$.
2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{\text{SK}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{SD}}$ et on note I le milieu du segment [SO].
   (a) Déterminer les coordonnées du point K.
   (b) En déduire que les points B, I et K sont alignés.
   (c) On note L le point d'intersection de l'arête [SA] avec le plan (BCI).
   Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.
   (d) Déterminer les coordonnées du point L.
3. On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\text{OB}},\,\overrightarrow{\text{OC}},\,\overrightarrow{\text{OS}}\right)$.
   (a) Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).
   (b) Montrer que les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{\text{AS}}$ et $\overrightarrow{\text{DS}}$ sont coplanaires.
   (c) Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?