Bac blanc 2016-2017

Exercice I (sur 5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :

$$f(x)=\frac{5x+6}{x^3-1}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

Partie 1 : Recherche des asymptotes

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Interpréter graphiquement ces limites.

Partie 2 : Etude des variations de la fonction f.

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f et démontrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a :

$$f'(x)=\frac{-10x^3-18x^2-5}{(x^3-1)^2}$$

2. Pour étudier le signe de f', on considère la fonction auxiliaire g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :

$$g(x)=-10x^3-18x^2-5$$

   (a) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

   (b) En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

   (c) À l'aide de la calculatrice, donner une **valeur approchée** de α à 10^{-2} près.

   (d) En déduire le tableau de signe de g.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Partie 3 : Etude d'une tangente.

1. Calculer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
2. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de T.

Exercice II (sur 5 points)

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes

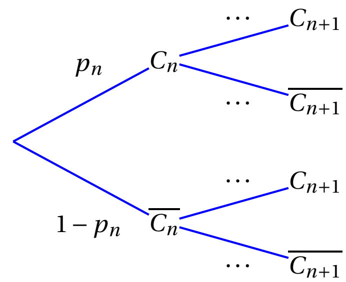
Partie A :

On considère une épreuve de tir à l'arc constitué de plusieurs tirs successifs sur une cible :

- si le tireur touche la cible lors d'un tir, la probabilité qu'il touche la cible au tir suivant est $\frac{4}{5}$.
- si le tireur manque la cible lors d'un tir, la probabilité pour qu'il la manque aussi au tir suivant est égale à $\frac{3}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par C_n l'évènement « le tireur touche la cible lors du n-ième tir » et on note p_n la probabilité de l'évènement C_n.
On considère que le tireur atteint toujours la cible lors de son premier lancer et donc $p_1=1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1}=\frac{2}{5}p_n+\frac{2}{5}$.
3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n=p_n-\frac{2}{3}$.

   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.

   (b) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}$.

   (c) Déterminer la limite de p_n.

Partie B :

On considère une urne contenant 3 boules blanches et 1 boule rouge. Les boules sont supposées indiscernables au toucher.

Un joueur tire au hasard successivement et avec remise 10 boules dans l'urne.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées par le joueur à la fin des 10 tirages.

1. (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

   (b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.

   (c) Déterminer l'espérance de X.

2. Le joueur doit payer 50 € pour jouer. Chaque boule rouge tirée lui rapporte 10 €.

   (a) Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.

   (b) Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 20 € ? Le résultat sera arrondi à 10^{-4} près.

Exercice III (sur 5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(-2\,;\,0\,;\,1)$, $B(1\,;\,2\,;\,-1)$ et $C(-2\,;\,2\,;\,2)$.

1. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.
   (b) En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.
   (c) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)
3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y-3z+3=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x-2y+6z=0$.
   Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2\\ y &=& -1+3t\\ z &=& t\end{array}\right., \; t\in\mathbb{R}.$$
4. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.* Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(1\,;\,-3\,;\,1)$ et de rayon $r=3$.
   (a) Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace. Démontrer que :
   $$M\in\mathscr{S} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+6y-2z+2=0$$
   (b) Déterminer l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et de la droite $\mathscr{D}$.
   (c) On donne la formule suivante, permettant de calculer la distance (notée $d(A,\mathscr{P})$) d'un point $A(x_A;y_A;z_A)$ à un plan $\mathscr{P}$ d'équation $ax+by+cz+d=0$:
   $$d(A,\mathscr{P})=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
   A l'aide de cette formule, démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère $\mathscr{S}$.

Exercice IV (sur 5 points)

Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1=\frac{3}{2}$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1}=\frac{nu_n+1}{2(n+1)}$$

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.
Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5

Traitement	Tant que $n<9$
	    Affecter à u la valeur …
	    Affecter à n la valeur …
	Fin Tant que

Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?
3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	…	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	…	0,0102	0,0101

   Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n\geqslant 1$, $v_n=nu_n-1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a : $u_n=\dfrac{1+(0,5)^n}{n}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Justifier que, pour tout entier $n\geqslant 1$, on a : $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{1+(1+0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.
   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n<0,001$.