

Limites de fonctions

Table des matières

I	Quantificateurs	1
II	Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$	1
II.1	Activité A page 162	1
II.2	Définitions	1
III	Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$:	2
IV	Limite infinie en un réel	3
IV.1	Activité B page 162	3
IV.2	Définitions	3
V	Limite finie en un réel :	3
VI	Opérations et limites (mêmes propriétés que pour les limites de suites)	3
VII	Limite d'un polynôme en $\pm\infty$:	4
VIII	Limite d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$:	5

I Quantificateurs

Définition

- **Quantificateur existentiel** : L'expression « il existe » se note \exists ; Ce symbole ne peut pas se mettre dans une phrase en français; il ne peut se mettre que dans une expression mathématique, toujours en **début** :

Exemple : il existe un réel x tel que x^2 soit strictement positif peut se noter :

$$\exists x \in \mathbb{R} / x^2 > 0$$

- **Quantificateur universel** : L'expression « pour tout » ou « quel que soit » se note \forall ; Ce symbole ne peut pas se mettre dans une phrase en français; il ne peut se mettre que dans une expression mathématique, toujours en **début** :

Exemple : pour tout réel x , $|x|$ est positif ou nul peut se noter :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$$

II Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$

II.1 Activité A page 162

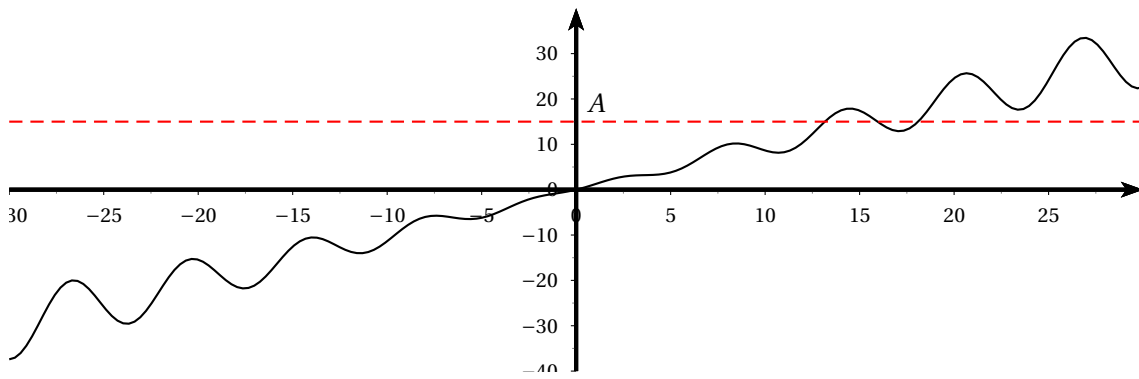
II.2 Définitions

Définition

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que tout intervalle $[A; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x assez grand.

Traduction : Pour tout $A > 0$, il existe x_0 tel que si $x > x_0$ alors $f(x) > A$.

Mathématiquement : $\forall A > 0, \exists x_0 / x > x_0 \Rightarrow f(x) > A$



Définition équivalente pour $-\infty$.



Définition

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ signifie que tout intervalle $[-\infty; A[$ contient $f(x)$ pour x tendant vers $-\infty$.
Traduction : $\forall A < 0, \exists x_0, x < x_0 \Rightarrow f(x) < A$

Exercice : écrire ce que signifie : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

III Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$:

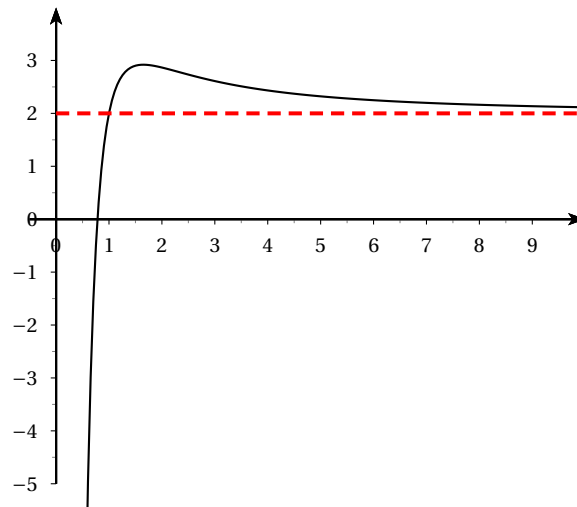


Définition :

Soit ℓ un réel. f a pour limite ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert centré sur ℓ $] \ell - \alpha ; \ell + \alpha [$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

On dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est alors **asymptote** à \mathcal{C}_f .

Traduction mathématique : $\forall \alpha > 0, \exists A > 0, x > A \Rightarrow f(x) \in] \ell - \alpha ; \ell + \alpha [$



La droite d'équation $y = 2$ est asymptote à \mathcal{C}_f .

Exemples : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-a} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-a)^p} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = 0$

IV Limite infinie en un réel

IV.1 Activité B page 162

IV.2 Définitions



Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si f n'est pas définie en a (a est donc une valeur interdite) et si $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pour x suffisamment proche de a .

Pour tout $A > 0$, $f(x) \in]A; +\infty[$ pour x proche de a .

Plus précisément : $\forall A > 0, \exists \varepsilon > 0, x \in]a - \varepsilon; a + \varepsilon[\Rightarrow f(x) > A$

Interprétation géométrique : on a alors une asymptote « verticale », droite parallèle à l'axe des ordonnées. C'est le cas de l'exemple précédent : la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe.

V Limite finie en un réel :



Définition

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a si $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de ℓ pour x suffisamment proche de a .

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, x \in]a - \alpha; a + \alpha[\Rightarrow f(x) \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[.$

Exemples :

Exemple 1 : la fonction $x \mapsto x^2$ en $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$$

Exemple 2 : soit la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

Sur $] -\infty; 0[$, $f(x) = -1$ et sur $]0; +\infty[$, $f(x) = 1$.

f n'a donc pas de limite en 0 (mais admet une limite à gauche et une limite à droite).

Exemple 3 : $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ non définie en 2.

$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$ après simplification par $x-2$ non nul puisque $x \neq 2$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.

VI Opérations et limites (mêmes propriétés que pour les limites de suites)

On considère deux fonctions f et g définies au voisinage de a , a étant, soit un réel x_0 , soit $-\infty$, soit $+\infty$.

Addition ou soustraction

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Alors :

Si $f(x)$ a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $g(x)$ a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f(x) + g(x)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Produit

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Alors :

Si $f(x)$ a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Si $g(x)$ a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $f(x) \times g(x)$ a pour limite	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Quotient

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Alors :

Si $f(x)$ a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
Si $g(x)$ a pour limite	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0 (avec signe constant)	ℓ'	$\pm\infty$	0	0	$\pm\infty$
alors $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$ (si la limite existe)	Forme indéterminée	Forme indéterminée



Définition

On dit que l'on a une forme indéterminée lorsque la limite n'est pas calculable directement ; il faut alors « travailler » davantage pour savoir si la fonction a une limite ou pas.

Remarque : Les quatre **formes indéterminées** sont : « $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Cela signifie qu'on ne peut pas calculer la limite éventuelle directement à l'aide d'un théorème ; il faut étudier cette limite de façon plus approfondie. Nous allons voir comment dans certains cas.

VII Limite d'un polynôme en $\pm\infty$:

Exemple : calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x^2)$.

$\lim_{x \rightarrow x^3} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$; par soustraction on a une forme indéterminée du type « $-\infty - \infty$ » donc on ne peut pas répondre directement.

Astuce : $x^3 - 2x^2 = x^3 \left(1 - \frac{2}{x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2) = +\infty}$.



Propriété

En cas de forme indéterminée, on calcule la limite à l'infini d'un polynôme en mettant en facteur le terme de plus haut degré.

Exemple : calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x)$.

On est bien en présence d'une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.

Pour $x \neq 0$, $x^2 - x = x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = +\infty$

Conseil : vérifier en traçant les courbes correspondant aux expressions à la calculatrice.

VIII Limite d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$: (voir chapitre sur les suites)

Rappel : une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes.



Propriété

En cas de forme indéterminée, on calcule la limite à l'infini d'une fraction rationnelle en factorisant au numérateur et au dénominateur les termes de plus haut degré.

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 3x}{x^4 + 5}\right)$.

Le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers $+\infty$ donc on a une forme indéterminée.

Pour $x \neq 0$, $\left(\frac{2x^2 + 3x}{x^4 + 5}\right) = \frac{x^2 \left(2 + \frac{3}{x}\right)}{x^4 \left(1 + \frac{5}{x^4}\right)} = \frac{2 + \frac{3}{x}}{x^2 \left(1 + \frac{5}{x^4}\right)}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right) = 2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{5}{x^4}\right) = 1$.

Par produit et quotient, on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 3x}{x^4 + 5}\right) = 0$