Limites de fonctions

Table des matières

I Quantificateurs . . . 1
II Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$ . . . 1
II.1 Activité A page 162 . . . 1
II.2 Définitions . . . 1
III Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$: . . . 3
IV Limite infinie en un réel . . . 3
IV.1 Activité B page 162 . . . 3
IV.2 Définitions . . . 3
V Limite finie en un réel : . . . 4
VI Opérations et limites . . . 5
VII Limite d'un polynôme en $\pm\infty$: . . . 6
VIII Limite d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$: . . . 6

I Quantificateurs

Définition

- **Quantificateur existentiel** : L'expression « il existe » se note $\exists$; Ce symbole ne peut pas se mettre dans une phrase en français; il ne peut se mettre que dans une expression mathématique, toujours en **début** :
  Exemple : il existe un réel x tel que x^2 soit strictement positif peut se noter :
  $\exists x \in \mathbb{R} / x^2 > 0$
- **Quantificateur universel** : L'expression « pour tout » ou « quel que soit » se note $\forall$; Ce symbole ne peut pas se mettre dans une phrase en français; il ne peut se mettre que dans une expression mathématique, toujours en **début** :
  Exemple :pour tout réel x, $|x|$ est positif ou nul peut se noter :
  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geqslant 0$

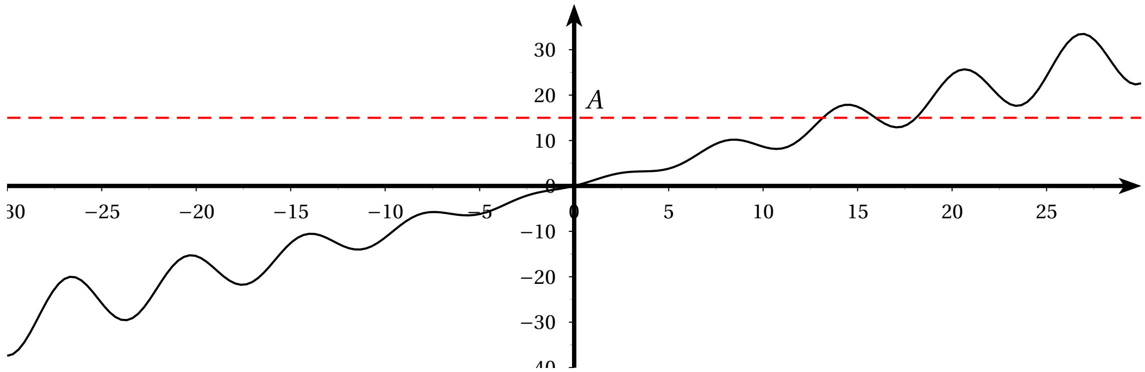
II Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$

II.1 Activité A page 162

II.2 Définitions

Définition

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que tout intervalle $[A;+\infty[$ contient $f(x)$ pour x assez grand.
Traduction : Pour tout $A > 0$, il existe x_0 tel que si$x > x_0$ alors $f(x) > A$.
Mathématiquement : $\forall A > 0$, $\exists x_0 / x > x_0 \Rightarrow f(x) > A$



Définition équivalente pour $-\infty$.

Définition

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ signifie que tout intervalle $[-\infty; A[$ contient $f(x)$ pour x tendant vers $-\infty$.
Traduction : $\forall A<0, \exists x_0, x<x_0 \Rightarrow f(x)<A$

Exercice : écrire ce que signifie : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

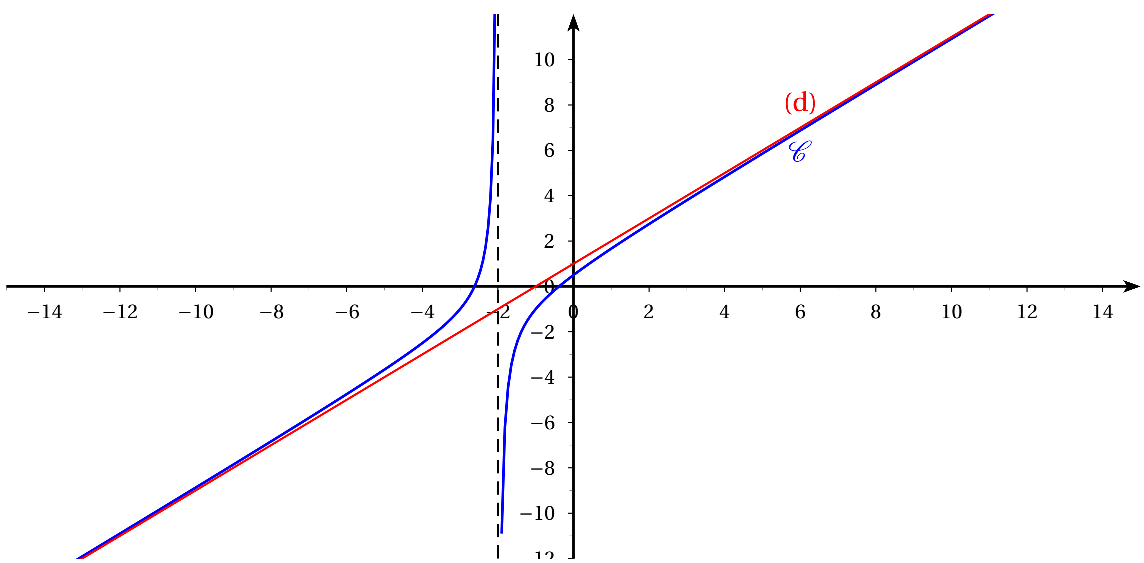
Asymptote oblique :

Définition

Une droite (d) d'équation $y = ax+b$ est asymptote (oblique) à la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f si $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0$.
Définition identique en $-\infty$).

Exemple : $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x+2}$, avec comme droite (d) d'équation : $y = x+1$.
Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Justification : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $f(x)-(x+1) = \dfrac{x^2+3x+1}{x+2}-(x+1) = \dfrac{x^2+3x+1-(x+2)(x+1)}{x+2} = \dfrac{x^2+3x+1-[(x+2)(x+1)]}{x+2} = \dfrac{x^2+3x+1-x^2-x-2x-2}{x+2} = -\dfrac{1}{x+2}$ qui tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$.

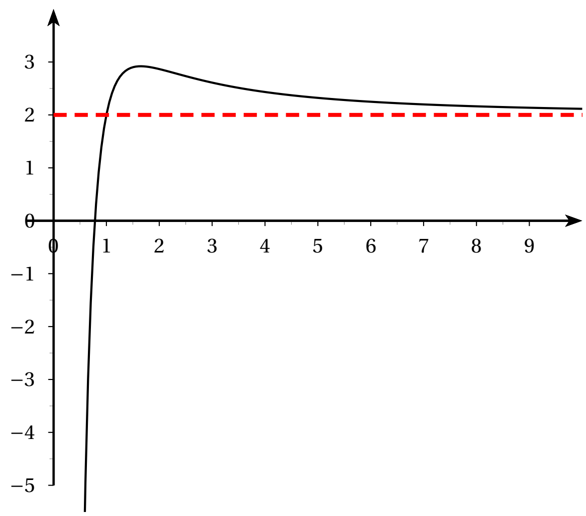


Remarque : on a vu que $f(x)-(x+1)=-\dfrac{1}{x+2}$ qui est positif pour $x<-2$ et négatif pour $x>-2$, donc la courbe est au-dessus de son asymétriquempote pour $x<-2$ et en dessous pour $x>-2$, ce qu'on voit sur la courbe.

III Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$:

Définition :

Soit ℓ un réel. f a pour limite ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert centré sur ℓ $]\ell-\alpha\,;\,\ell+\alpha[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
On dit alors que la droite d'équation $y=\ell$ est alors asymptote à $\mathscr{C}_f$.
Traduction mathématique : $\forall \alpha>0,\ \exists A>0,\ x>A \Rightarrow f(x)\in]\ell-\alpha;\ell+\alpha[$



Exemples : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-a}=0$; $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x-a)^p}=0$; $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x-a}}=0$

IV Limite infinie en un réel

IV.1 Activité B page 162

IV.2 Définitions

Définition

Soit $a\in\mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si f n'est pas définie en a (a est donc une valeur interdite)et si $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pour x suffisamment proche de a.
Pour tout $A>0$, $f(x)\in]A\,;\,+\infty[$ pour x proche de a.
Plus précisément : $\forall A>0,\ \exists\varepsilon>0,\ x\in]a-\varepsilon\,;\,a+\varepsilon[\Rightarrow f(x)>A$

Interprétation géométrique : on a alors une asymptote « verticale », droite parallèle à l'axe des ordonnées.
C'est le cas de l'exemple précédent : la droite d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à la courbe.

V Limite finie en un réel :

Définition

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$.
$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a si $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de ℓ pour x suffisamment proche de a.
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ x \in]a-\alpha\ ;\ a+\alpha[\Rightarrow f(x) \in]\ell - \varepsilon\ ;\ \ell + \varepsilon[$.

Exemples :

Exemple 1 : la fonction $x \mapsto x^2$ en $a \in \mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$

Exemple 2 : soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.
Sur $]-\infty\ ;\ 0[$, $f(x) = -1$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) = 1$.
f n'a donc pas de limite en 0 (mais admet une limite à gauche et une limite à droite).

Exemple 3 : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (bien que 0 soit une valeur interdite). Cela permet éventuellement de prolonger des fonctions non définies en un point. (voir chapitre ultérieur sur la continuité)

VI Opérations et limites

On considère deux fonctions f et g définies au voisinage de α, α étant, soit un réel x_0, soit $-\infty$, soit $+\infty$.

Addition ou soustraction

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Alors :

Si $f(x)$ a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $g(x)$ a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f(x)+g(x)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

Produit

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Alors :

Si $f(x)$ a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Si $g(x)$ a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $f(x) \times g(x)$ a pour limite	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

Quotient

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Alors :

Si $f(x)$ a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
Si $g(x)$ a pour limite	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0 (avec signe constant)	ℓ'	$\pm\infty$	0	0	$\pm\infty$
alors $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$ (si la limite existe)	**Forme indéterminée**	**Forme indéterminée**

Définition

On dit que l'on a une forme indéterminée lorsque la limite n'est pas calculable directement ; il faut alors « travailler » davantage pour savoir si la fonction a une limite ou pas.

Remarque : Les quatre **formes indéterminées** sont : « $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».
Cela signifie qu'on ne peut pas calculer la limite éventuelle directement à l'aide d'un théorème ; il faut étudier cette limite de façon plus approfondie. Nous allons voir comment dans certains cas.

VII Limite d'un polynôme en $\pm\infty$:

Exemple : calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3 - 2x^2\right)$.
$\lim\limits_{x\to x^3} = /\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$; par soustraction on a une forme indéterminée du type « $-\infty - \infty$ » donc on ne peut pas répondre directement.
Astuce : $x^3 - 2x^2 = x^3\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{2}{x}\right) = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3 - x^2\right) = +\infty}$.

Propriété

En cas de forme indéterminée, on calcule la limite à l'infini d'un polynôme en mettant en facteur le terme de plus haut degré.

Exemple : calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 - x\right)$.
On est bien en présence d'une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.
Pour $x \neq 0$, $x^2 - x = x^2\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.
Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 - x\right) = +\infty}$

Conseil : vérifier en traçant les courbes correspondant aux expressions à la calculatrice.

VIII Limite d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$:

Rappel : une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes.

Propriété

En cas de forme indéterminée, on calcule la limite à l'infini d'une fraction rationnelle en factorisant au numérateur et au dénominateur les termes de plus haut degré.

Exemple :

Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x}{x^4+5}\right)$.

Le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers $+\infty$ donc on a une forme indéterminée.

Pour $x \neq 0$, $\left(\dfrac{2x^2+3x}{x^4+5}\right) = \dfrac{x^2\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{x^4\left(1+\dfrac{5}{x^4}\right)} = \dfrac{2+\dfrac{3}{x}}{x^2\left(1+\dfrac{5}{x^4}\right)}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{3}{x}\right)=2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{5}{x^4}\right)=1$.

Par produit et quotient, on obtient $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x}{x^4+5}\right)=0}$