Fonction exponentielle

Table des matières

I Fonction exponentielle

Théorème (première partie admise)

- Il existe une fonction f dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- Celle-ci est **unique**.
  Cette fonction est appelée fonction exponentielle. On la note exp.

Démonstration

- On **admet** l'existence.
- Cette fonction ne s'annule pas et est strictement positive.

Démonstration : Considérons la fonction g définie par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables. La dérivée de $x \mapsto f(-x)$ est $x \mapsto -f'(-x)$ car la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$ est $x \mapsto af(ax+b)$. On en déduit que : $f'(x) = f'(x)f(-x) + f(x) \times \left(-f'(-x)\right) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$. Or, par définition de f, $f' = f$ donc $g'(x) = f(x)f(-x) - (x)f(-x) = 0$.
g est donc une fonction **constante** sur $\mathbb{R}$.
Pour trouver cette valeur, il suffit de calculer l'image dun nombre particulier.
$g(0) = [f(0)]^2 = 1^2 = 1$ donc $g(0) = 1$. Par conséquent : $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
f ne peut donc pas s'annuler ; en effet, s'il existait une valeur x_0 avec $f(x_0) = 0$, on aurait : $g(x_0) = f(x_0)f(-x_0) = 0$; or $g(x_0) = 1$, ce qui est contradictoire.

Positivité : Supposons qu'il existe un nombre x_0 avec $f(x_0) < 0$. f est dérivable, donc continue. $f(x_0) < 0$ et $f(0) = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait un nombre α tel que $f(\alpha) = 0$, ce qui est impossible d'après ce qui précède.

- **Démonstration de l'unicité** Supposons qu'il existe une autre fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant également $g' = g$ et $g(0) = 1$. Soit la fonction $h = \dfrac{f}{g}$. h est dérivable : $h' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2} = 0$ (car $f' = f$ et $g' = g$). h est donc constante sur $\mathbb{R}$. $h(0) = 1$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1$ donc $f(x) = g(x)$ donc $f = g$.

Cette unique fonction f vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$ est notée exp.

Résumé des propriétés :

Pour tout réel x :

- $\exp x > 0$
- $\exp 0 = 1$
- $\exp'(x) = \exp(x)$

II Étude de la fonction exponentielle :

II.1 Sens de variation :

Propriété

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$, donc pour tout réel x, $\exp'(x) > 0$ puisque $\exp(x) > 0$. La fonction exp est donc croissante.

II.2 Limites à l'infini

Théorème

$\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

Démonstration : Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \exp(x) - x$. f est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \exp'(x) - 1 = \exp(x) - 1$. exp est croissante et $\exp(0) = 1$, donc, pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$. On en déduit que f est croissante et comme $f(0) = \exp(0) - 0 = \exp(0) = 1 > 0$ donc $f(x) > 0$. Par conséquent : $f(x) > 0$ donc $\boxed{\exp(x) > x}$. Or $\lim\limits_{x\to=\infty} x = +\infty$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty}$.

On a vu au début que, pour tout x, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ donc $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$. En posant $X = -x$, donc $x = -X$, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \exp(-X) = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{\exp(X)} = 0$.

Conséquences :

1. Pour tout $a > 0$, $\exp(a) > 0$
2. Pour tous réels a et b, $\exp a = \exp b \Leftrightarrow a = b$.

3. Pour tous réels a et b, $\exp a < \exp b \Leftrightarrow a < b$.

Démonstration :

1. exp est croissante et $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ donc exp est une fonction positive.
2. (a) $a = b \Rightarrow \exp(a) = \exp(b)$ comme pour n'importe quelle fonction.
   (b) $\exp(a) = \exp(b) \Rightarrow a = b$ car la fonction exp est croissante
3. Même démonstration que dans le cas d'égalité

III Propriétés algébriques

III.1 Exponentielle de l'opposé d'un réel :

Propriété

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$

Démonstration : On a déjà vu que $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ donc $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$.

III.2 Exponentielle de la somme de deux réels :

Propriété

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Démonstration Soit y un réel quelconque fixé. On considère alors la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(x+y)$ (la variable est x). f est dérivable, comme composée de fonctions dérivables; $\dfrac{1}{\exp(y)}$ est une constante. La dérivée de $x \mapsto \exp(x+y)$ est $x \mapsto 1 \times \exp'(x+y) = \exp(x+y)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(x+y)$ donc $f' = f$. $f(0) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(0 = y) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(y) = 1$. On en déduit que la fonction f est la fonction exponentielle (unicité de la fonction vérifiant ces propriétés). Par conséquent : $f(x) = \exp(x)$ donc, pour tout x, $\dfrac{1}{\exp(y)}\exp(x+y) = \exp(x)$, d'où $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)}$

Remarque : on a vu dans le I que la seule fonction vérifiant cette relation fonctionnelle et $f(0) = 1$ devait vérifier $f' = f$, donc était la fonction exponentielle (par unicité de la fonction vérifiant les deux conditions $f' = f$ et $f(0) = 1$).

III.3 Exponentielle de la différence de deux réels :

Propriété

Pour tous réels x et y : $\exp(x-y)=\dfrac{\exp x}{\exp y}$

Démonstration : $\exp(x-y)=\exp(x+(-y))=\exp(x)\times\exp(-y)=\exp(x)\times\dfrac{1}{\exp(x)}=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Exemple : Pour tout réel x, $\dfrac{\exp(2x+3)}{\exp(2x-1)}=\exp[(2x-3)-(2x-1)]=\exp 4$

III.4 Exponentielle d'une somme de réels :

Propriété

Pour tous réels x_1, x_2, ..., x_n, $\exp(x_1+x_2+\ldots+x_n)=\exp(x_1)\times\exp(x_2)\times\cdots\times\exp(x_n)$. **Écriture symbolique** : $\exp\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\exp(x_i)$

Démonstration : On démontre la propriété par récurrence sur n.

- **Initialisation** : Pour $n=1$, il n'y a qu'un terme x_1 ; on a évidemment $\exp(x_1)=\exp(x_1)$!
- **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un entier n quelconque. $\exp(x_1+x_2+\cdots x_n)=\exp(x_1)\times\exp(x_2)\times\cdots\exp(x_n)$. Alors : $\exp(x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1})=\exp[(x_1+x_2+\cdots+x_n)+x_{n+1}]=\exp((x_1+x_2+\cdots+x_n))\times\exp(x_{n+1})$ (d'après la propriété fonctionnelle de l'exponentielle) $=\left[\exp(x_1)\times\exp(x_2)\times\cdots\exp(x_n)\right]\times\exp(x_{n+1})=\exp(x_1)\times\exp(x_2)\times\cdots\exp(x_n)\times\exp(x_{n+1})$. (c.q.f.d.)

Propriété

Pour tout réel x, $\exp(nx)=(\exp(x))^n$.

Démonstration : Lorsque $n>0$, on applique la propriété précédente en prenant tous les x_i égaux à x. Pour $n=0$, l'égalité est vérifiée. Si $n<0$, $\exp(nx)=\exp((-n)(-x))=(\exp(-x))^{-n}=\left[\dfrac{1}{\exp x}\right]^{-n}=(\exp(x))^n$

III.5 Le nombre e ; la notation e^x :

Définition

$e=\exp(1)$. Valeur approchée : $e\approx 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,352\,662\,497\,757\,247\,093\,699\,95$.
Pour la plupart des exercices, il suffit d'utiliser $\mathrm{e}\approx 2,7$ sou $\mathrm{e}\approx 2;72$.
Remarque : e est, comme π, un nombre transcendant, c'est-à-dire solution d'aucune équation polynomiale, donc en particulier non rationnel)

Notation

Pour tout entier n, on a : $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp 1)^n = e^n$ en utilisant la notation précédente. Plus généralement, on convient de noter $\exp(x)$ par e^x.

III.6 Résumé des différentes propriétés avec cette notation :

Propriétés

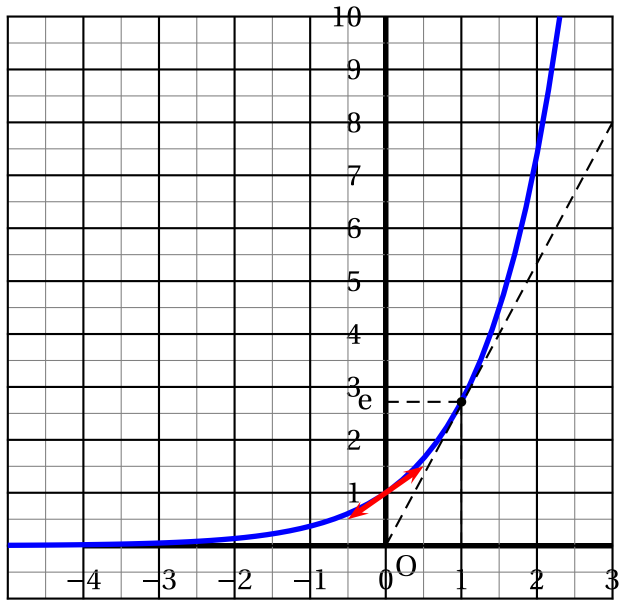
Pour tous réels x, y et tout entier relatif n :

- $e^0 = 1$
- $e^x > 0$
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

III.7 Courbe représentative avec les tangentes en 0 et 1

- La tangente en 0 a pour coefficient directeur $\exp'(0) = \exp(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.
- La tangente en 1 a pour équation $y = exp'(1)(x-1) + \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}x$; cette tangente passe donc par l'origine.
- Le fonction exp est croissante ; l'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$ puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
- $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \approx 2,7$ et $\mathrm{e}^2 \approx 7,4$

Courbe représentative de exp



III.8 Limites importantes (croissances comparées)

Théorème

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{N}^*$

Démonstrations :

- Pour tout x, $e^x > x$ donc, pour tout $x > 0$, $e^{\frac{x}{2}} > \dfrac{x}{2}$ d'où, puisque $x > 0$ $(e^{\frac{x}{2}})^2 > \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{-X}{e^{-X}} = \lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{X}{e^X} == \lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0$ car $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$.
- Pour tout $n \neq 0$, on pose $X = \dfrac{x}{n}$ (et donc $x = nX$). On a alors : $\dfrac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^{nX}}{(nX)^n} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{(e^X)^n}{n^n X^n}$
$= \lim\limits_{X\to+\infty} \left[\dfrac{1}{n^n}\left(\dfrac{e^X}{X}\right)^n.\right]$. $\dfrac{1}{n^n}$ est une constante ; $\lim\limits_{X\to+\infty} \left(\dfrac{e^X}{X}\right) +\infty$ d'où $\lim\limits_{X\to+\infty} \left(\dfrac{e^X}{X}\right)^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.
- Pour $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x$, on pose $X = -x$. Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim\limits_{X\to+\infty} (-X)^n e^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \left[(-1)^n \dfrac{X^n}{e^X}\right] = \lim\limits_{X\to+\infty} \left[(-1)^n \dfrac{1}{\frac{e^X}{X^n}}\right]$
$= 0$ car $\lim\limits_{X\to+\infty} \left(\dfrac{e^X}{X^n}\right) = +\infty$

IV Exponentielle d'une fonction

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable et a pour dérivée : $(e^u)' = u'e^u$.

Exemples :

a) $f(x) = e^{2x+4}$; $f = e^u$ avec $u(x) = 2x+3$. $u'(x) = 2$; $f' = u'e^u$ donc $\boxed{f'(x) = 2e^{2x+3}}$.

b) $f(x) = e^{x^2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$. $f = e^u$ avec $u(x) = x^2$. $f' = u'e^u$ avec $u'(x) = 2x$ donc $\boxed{f'(x) = 2xe^{x^2}}$.

c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ sur $]0\,;\,+\infty[$. $f = e^u$ avec $u(x) = \dfrac{1}{x}$. $f' = u'e^u$ avec $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ donc $\boxed{f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}$.