# Limites de fonctions

## Table des matières



## I Quantificateurs

### Définition

- **Quantificateur existentiel** : L'expression « il existe » se note $\exists$; Ce symbole ne peut pas se mettre dans une phrase en français; il ne peut se mettre que dans une expression mathématique, toujours en **début** :
  Exemple : il existe un réel $x$ tel que $x^2$ soit strictement positif peut se noter :
  $\exists x \in \mathbb{R} / x^2 > 0$
- **Quantificateur universel** : L'expression « pour tout » ou « quel que soit » se note $\forall$ ; Ce symbole ne peut pas se mettre dans une phrase en français; il ne peut se mettre que dans une expression mathématique, toujours en **début** :
  Exemple :pour tout réel $x$, $|x|$ est positif ou nul peut se noter :
  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geqslant 0$

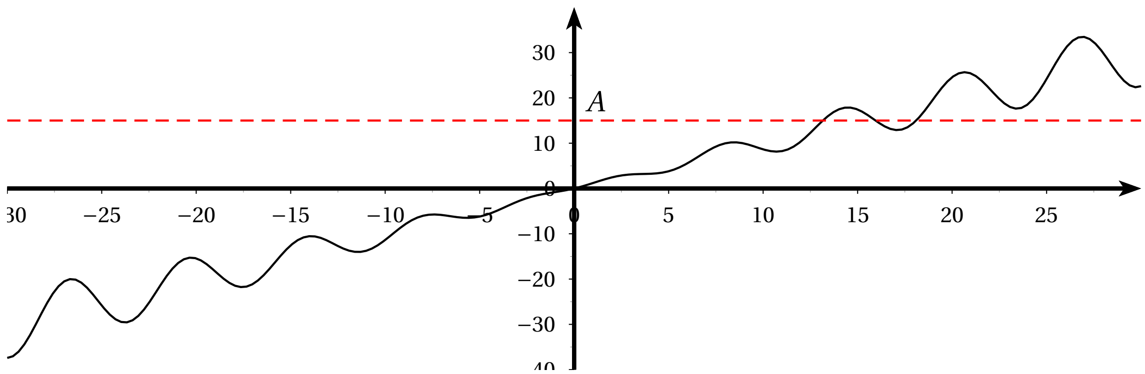
# II Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$

## II.1 Activité A page 162

## II.2 Définitions

**Définition**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ signifie que tout intervalle $[A;+\infty[$ contient $f(x)$ pour $x$ assez grand.
Traduction : Pour tout $A > 0$, il existe $x_0$ tel que si $x > x_0$ alors $f(x) > A$.
**Mathématiquement** : $\forall A > 0,\ \exists x_0 / x > x_0 \Rightarrow f(x) > A$




Définition équivalente pour $-\infty$.

**Définition**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ signifie que tout intervalle $[-\infty; A[$ contient $f(x)$ pour $x$ tendant vers $-\infty$.
Traduction : $\forall A < 0,\ \exists x_0,\ x < x_0 \Rightarrow f(x) < A$

**Exercice** : écrire ce que signifie : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

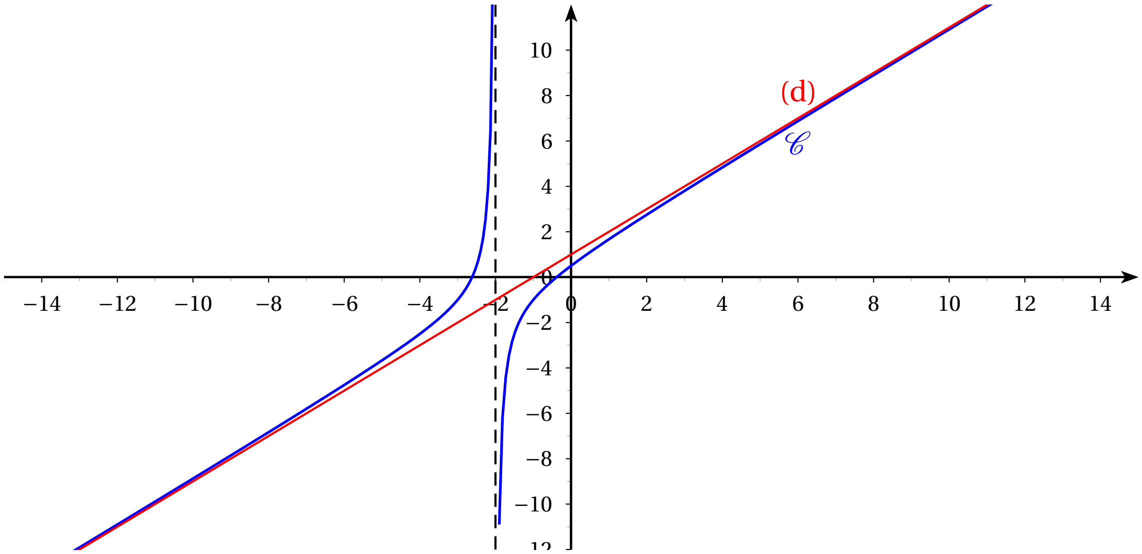
**Asymptote oblique :**

**Définition**

Une droite $(d)$ d'équation $y = ax+b$ est asymptote (oblique) à la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction $f$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0$.
Définition identique en $-\infty$).

**Exemple :** $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x+2}$, avec comme droite $(d)$ d'équation : $y = x+1$.
Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

**Justification** : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $f(x)-(x+1) = \dfrac{x^2+3x+1}{x+2} - (x+1) = \dfrac{x^2+3x+1-(x+2)(x+1)}{x+2} = \dfrac{x^2+3x+1-[(x+2)(x+}{x+2}$
$\dfrac{x^2+3x+1-x^2-x-2x-2}{x+2} = -\dfrac{1}{x+2}$ qui tend vers 0 quand $x$ tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$.

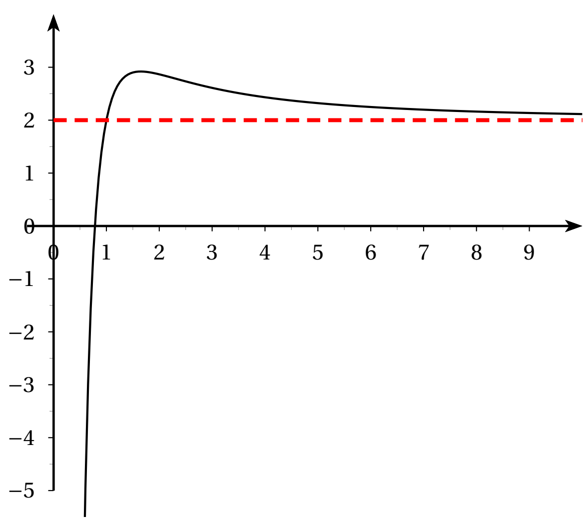



Remarque : on a vu que $f(x)-(x+1)=-\dfrac{1}{x+2}$ qui est positif pour $x<-2$ et négatif pour $x>-2$, donc la courbe est au-dessus de son asymétriquempote pour $x<-2$ et en dessous pour $x>-2$, ce qu'on voit sur la courbe.

## III Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$ :

**Définition :**

Soit $\ell$ un réel. $f$ a pour limite $\ell$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert centré sur $\ell$ $]\ell-\alpha\ ;\ \ell+\alpha[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $x$ assez grand.
On dit alors que la droite d'équation $y=\ell$ est alors asymptote à $\mathscr{C}_f$.
Traduction mathématique : $\forall \alpha>0, \exists A>0,\ x>A \Rightarrow f(x)\in]\ell-\alpha;\ell+\alpha[$



**Exemples :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-a}=0$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(x-a)^p}=0$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x-a}}=0$

# IV Limite infinie en un réel

## IV.1 Activité B page 162

## IV.2 Définitions

**Définition**

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $a$ si $f$ n'est pas définie en $a$ ($a$ est donc une valeur interdite )et si $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pour $x$ suffisamment proche de $a$.
Pour tout $A > 0$, $f(x) \in ]A\,;\,+\infty[$ pour $x$ proche de $a$.
Plus précisément : $\forall A > 0,\ \exists \varepsilon > 0,\ x \in ]a - \varepsilon\,;\,a + \varepsilon[ \Rightarrow f(x) > A$

**Interprétation géométrique :** on a alors une asymptote « verticale », droite parallèle à l'axe des ordonnées. C'est le cas de l'exemple précédent : la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe.

# V Limite finie en un réel :

**Définition**

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$.
$f(x)$ tend vers $\ell$ quand $x$ tend vers $a$ si $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de $\ell$ pour $x$ suffisamment proche de $a$.
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ x \in ]a - \alpha\,;\,a + \alpha[ \Rightarrow f(x) \in ]\ell - \varepsilon\,;\,\ell + \varepsilon[$.

**Exemples :**

**Exemple 1 :** la fonction $x \mapsto x^2$ en $a \in \mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$

**Exemple 2** : soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.
Sur $]-\infty\,;\,0[$, $f(x) = -1$ et sur $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = 1$.
$f$ n'a donc pas de limite en 0 (mais admet une limite à gauche et une limite à droite).

**Exemple 3 :** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (bien que 0 soit une valeur interdite). Cela permet éventuellement de prolonger des fonctions non définies en un point. (voir chapitre ultérieur sur la continuité)

# VI Opérations et limites

On considère deux fonctions $f$ et $g$ définies au voisinage de $\alpha$, $\alpha$ étant, soit un réel $x_0$, soit $-\infty$, soit $+\infty$.

### Addition ou soustraction

Soient $\ell$ et $\ell'$ deux réels. Alors :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $f(x)$ a pour limite | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| Si $g(x)$ a pour limite | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| alors $f(x)+g(x)$ a pour limite | $\ell+\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | **Forme indéterminée** |

### Produit

Soient $\ell$ et $\ell'$ deux réels. Alors :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $f(x)$ a pour limite | $\ell$ | $\ell>0$ | $\ell<0$ | $\ell>0$ | $\ell<0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | 0 |
| Si $g(x)$ a pour limite | $\ell'$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ |
| alors $f(x)\times g(x)$ a pour limite | $\ell\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | **Forme indéterminée** |

### Quotient

Soient $\ell$ et $\ell'$ deux réels. Alors :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $f(x)$ a pour limite | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | 0 | $\pm\infty$ | 0 | $\pm\infty$ |
| Si $g(x)$ a pour limite | $\ell\neq 0'$ | $\pm\infty$ | 0 | $\ell'$ | $\pm\infty$ | 0 | 0 | $\pm\infty$ |
| alors $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ a pour limite | $\dfrac{\ell}{\ell'}$ | 0 | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | 0 | $\pm\infty$ (si la limite existe) | **Forme indéterminée** | **Forme indéterminée** |

### Définition

On dit que l'on a une forme indéterminée lorsque la limite n'est pas calculable directement ; il faut alors « travailler » davantage pour savoir si la fonction a une limite ou pas.

**Remarque** : Les quatre **formes indéterminées** sont : « $\infty - \infty$ ; $0 \times \infty$ ; $\dfrac{0}{0}$ ; $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».
Cela signifie qu'on ne peut pas calculer la limite éventuelle directement à l'aide d'un théorème ; il faut étudier cette limite de façon plus approfondie. Nous allons voir comment dans certains cas.

## VII Limite d'un polynôme en $\pm\infty$ :

**Exemple** : calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 - 2x^2\right)$.
$\lim\limits_{x \to x^3} = /\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$ ; par soustraction on a une forme indéterminée du type « $-\infty - \infty$ » donc on ne peut pas répondre directement.
Astuce : $x^3 - 2x^2 = x^3\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right) = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 - x^2\right) = +\infty}$.

### Propriété

En cas de forme indéterminée, on calcule la limite à l'infini d'un polynôme en mettant en facteur le terme de plus haut degré.

**Exemple** : calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - x\right)$.
On est bien en présence d'une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.
Pour $x \neq 0$, $x^2 - x = x^2\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.
**Par produit** : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - x\right) = +\infty}$

Conseil : vérifier en traçant les courbes correspondant aux expressions à la calculatrice.

## VIII Limite d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$ :

**Rappel** : une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes.

### Propriété

En cas de forme indéterminée, on calcule la limite à l'infini d'une fraction rationnelle en factorisant au numérateur et au dénominateur les termes de plus haut degré.

**Exemple** :

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x^2+3x}{x^4+5}\right)$.

Le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers $+\infty$ donc on a une forme indéterminée.

Pour $x \neq 0$, $\left(\dfrac{2x^2+3x}{x^4+5}\right) = \dfrac{x^2\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{x^4\left(1+\dfrac{5}{x^4}\right)} = \dfrac{2+\dfrac{3}{x}}{x^2\left(1+\dfrac{5}{x^4}\right)}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2+\dfrac{3}{x}\right) = 2$ ; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ ; $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1+\dfrac{5}{x^4}\right) = 1$.

Par produit et quotient, on obtient $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x^2+3x}{x^4+5}\right) = 0}$