Géométrie dans l'espace

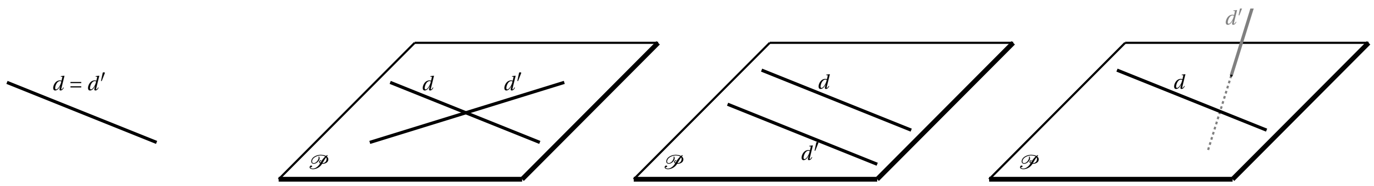
Table des matières

I Positions relatives dans l'espace

I.1 Position relative de deux droites

Propriétés

Deux droites d_1 et d_2 peuvent être coplanaires ou non coplanaires.
Si elles sont coplanaires (contenues dans le même plan), elles peuvent être sécantes en un point, strictement parallèles ou confondues. Si elles ne sont pas coplanaires, aucun plan ne contient les deux droites. (exemple : certains arêtes d'un cube)



(a) : $d = d'$
parallèles, coplanaires.

(b) : d et d' *sécantes*
$d, d' \subset$ un unique plan.

(c) : d et d' *parallèles strictes*
$d, d' \subset$ dans un unique plan.

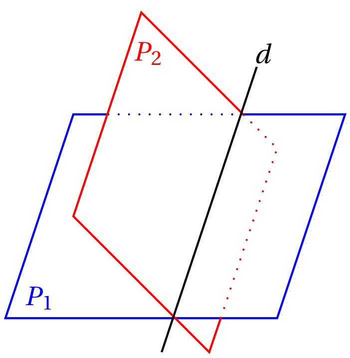
(d) : d et d' non coplanaires
d et d' ni sécantes, ni parallèles

I.2 Position relative de deux plans

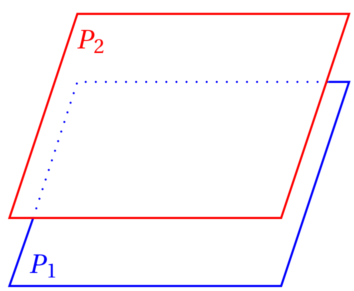
Propriétés

Deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.
S'ils sont sécants, l'intersection est une **droite**.
S'ils sont parallèles, ils sont distincts ou confondus.

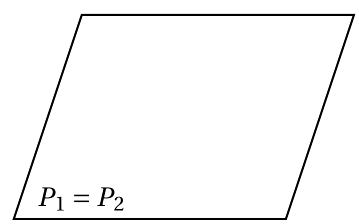
Plans sécants :
une droite d'intersection



Plans strictement parallèles :
aucun point d'intersection



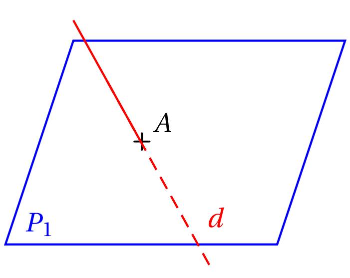
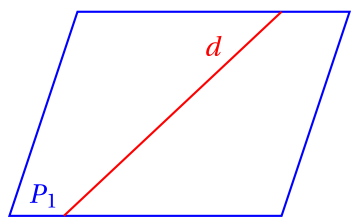
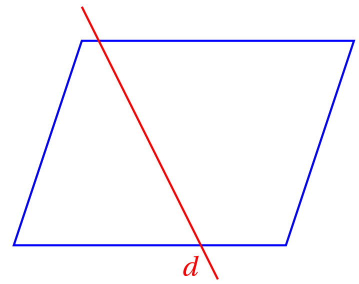
Plans parallèles confondus :
un plan d'intersection



I.3 Position relative d'une droite et d'un plan

Propriétés

Une droite $\mathscr{D}$ et un plan $\mathscr{P}$ sont soit sécants, soit parallèles.
S'ils sont sécants, ils n'ont qu'un point commun.
S'ils sont parallèles, $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$ ou ils n'ont aucun point commun.

Droite et plan sécants : un point d'intersection	Droite et plan parallèles : droite incluse dans le plan	Droite et plan parallèles : aucun point d'intersection
		

Remarques :
Pour définir un plan, il faut trois points distincts, ou une droite et un point extérieur à la droite, ou deux droites sécantes ou strictement parallèles.

II Règles d'incidence

II.1 Propriété fondamentale

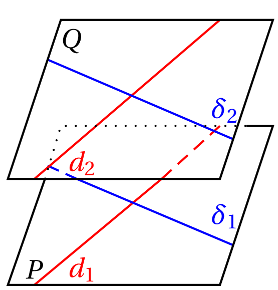
Dans un plan de l'espace, toutes les propriétés fondamentales de la géométrie plane s'appliquent.

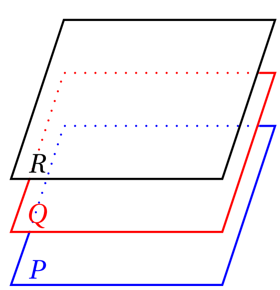
Propriétés

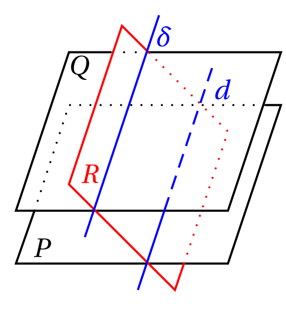
- Deux droites de l'espace sont **parallèles** si elles sont coplanaires et non sécantes,
- Deux plans de l'espace sont **parallèles** lorsqu'ils ne sont pas sécants,
- Une droite et un plan de l'espace sont **parallèles** lorsqu'ils ne sont pas sécants.

Propriété

- Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles,.
- Si deux droites sécantes d'un plan $\mathscr{P}$ sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan $\mathscr{Q}$ alors les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles,
- Si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ils sont parallèles,
- Si deux plans sont parallèles alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.





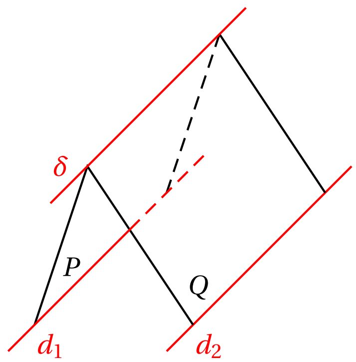


II.2 Théorème du « toit »

Théorème

Si on a :
- deux droites parallèles d et d' ;
- un plan P contenant d ;
- un plan Q contenant d' ;
- P et Q sécants selon une droite δ.

Alors, l'intersection δ des deux plans est parallèle aux droites d et d'.



Démonstration :

Raisonnons par l'absurde. On considère que δ n'est pas parallèle à d_1 ce qui entraine que δ n'est pas parallèle à d_2. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de δ.Comme d_1 et d_2 sont parallèles, on appelle $\overrightarrow{u}$ leur vecteur directeur.

- Comme δ n'est pas parallèle à d_1, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc, comme δ est contenue dans P, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs directeurs du plan P.
- Comme δ est aussi contenue dans Q, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont aussi des vecteurs directeurs du plan Q.
- On en déduit que les plans P et Q sont parallèles, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que P et Q sont sécants. Par conséquent, δ est donc parallèle à d_1 et d_2

III Orthogonalité dans l'espace

III.1 Droite perpendiculaire à un plan

Propriété

Dans un plan $\mathscr{P}$, soient deux droites d_1 et d_2 sécantes en A et une droite Δ.
On suppose que la droite Δ est perpendiculaire en A à d_1 et en A à d_2.
Alors, la droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

Définition

- Deux droites sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un même point sont perpendiculaires.
- Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle elle est orthogobale à **toutes** les droites de ce plan.

Propriété

Feux droites sont orthogonales si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Propriété

Une droite est orthogonale à un plan si, et seulement si, un vecteur directeur est orthogonal à une base de ce plan

Définition

On considère une droite orthogonale à un plan.
Tout vecteur directeur de cette droite est appelé **vecteur normal à ce plan**.

Propriété admise

Une droite est orthogonale à un plan si elle orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

IV Vecteurs de l'espace

IV.1 Translations

Définition

Si A et B sont deux points de l'espace, la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la transformmation qui, à tout point C, associe le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Propriété

Soient E et F deux points de l'espace, $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace et t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
Si E' et F' sont les images par t de E et F, alors $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{E'F'}$

Démonstration :
$t(E) = E' \Leftrightarrow \overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{u}$.
$t(F) = F' \Leftrightarrow \overrightarrow{FF'} = \overrightarrow{u}$.
En utulisant la relation de Chasles, $\overrightarrow{E'F'} = \overrightarrow{E'E} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FF'} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{EF}$.

Exemple : $ABCDEFGH$ est un cube. I est le centre du carré $BCGF$.
On note K l'image de I par la translation $t_{\overrightarrow{AC}}$ (translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$).
Montrons que I est le milieu de $[AK]$.

Par définition de K, on a $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{AC}$. On en déduit que $ACKKF$ est un parallélogramme.
Ses diagonales ont alors le même milieu.
Or, I étant le centre du carré $BCGF$, I est le milieu de la diagonale $[CF]$ du carré, donc le diagonale du parallélogramme $ACKF$.
I est alors le milieu de l'autre diagonale de ce parallélogramme, $[AK]$.

IV.2 Vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colonéaires lorsqu'il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.
Remarque; on a alors $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{v}$

¨Propriété

Soient trois points A, B et C de l'espace deux à deux distincts.
Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Démonstration :
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont la même direction, donc les droites (AB) et (AC) sont parallèles; comme elles ont un point commun, elles sont confondues et les trois points sont alignés.

Définition

On considère quatre points O, A, B, C distincts de l'espace.
On définit les vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}$.
On dit que ces trois vecteurs sont coplanaires lorsque les quatre points O, A, B, C sont coplanaires (donc appartiennent à un même plan).

Propriété

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires (ainsi $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas nuls).
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.

IV.3 Vecteurs linéairement indépendants et base de l'espace

Séfinition

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace et trois réels a, b et c.
Ces trois vecteurs sont linéairement indépendants lorsqu'ils ne sont pas coplanaires, autrement dit lorsque :
$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{c} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \Rightarrow a = b = c = 0$
On dit alors que ces trois vecteurs forment une base de l'espace.

Propriété

Soit $\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$ une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\widehat{w}$ de l'espace, il existe trois réels x, y et z tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$.
Cette décomposition est donc unique.
On dit que $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans cette base.

V Repère de l'espace

V.1 Coordonnées d'un point

Définition

Un repère de l'espace est défini par un point O (origine) et une base $\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$. Le repère est noté $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$

Pour tout point M, il existe un unique triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.
$(x\ ;\ y\ ;\ z)$ sont les coordonnées de M ; on écrit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$.

Coordonnées d'un vecteur

Soient $A\left(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A\right)$ et $B\left(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B\right)$ deux points de l'espace.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B = x_A \\ y_B = y_A \\ z_B = z_A \end{pmatrix}$ (elles se notent verticalement !)

Propriété

Soient $A\left(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A\right)$ et $BF\left(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B\right)$ deux points de l'espace.
Les coordonnées du port I, milieu de $[AB]$ sont $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\ ;\ \dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

VI Représentation paramétrique d'une droite

Propriété

Soit une droite d passant par $A(x_A; y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Les coordonnées $(x; y; z)$ de tout point M de d sont de la forme :

$$\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}.$$

C'est ce qu'on appelle représentation paramétrique de d.

Réciproque : évidente

Démonstration : $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, d'où $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$. on en déduit le résultat en considérant les coordonnées.

VII Orthogonalité et produit scalaire dans l'espace

VII.1 Orthogonalité

Définition

Deux droites sont orthogonales lorsque deux parallèles respectives passent par un même point sont perpendiculaires.
Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsque les droites dirigées par ces vecteurs sont orthogonales.

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Propriété

Deux droites sont orthogonales si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Propriété

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à une base de ce plan.

Définition

Soit d une droite orthogonale à un plan $\mathscr{P}$.
Tout vecteur directeur de cette droite est appelé vecteur normal à ce plan.

VII.2 Produit scalaire

Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.
On définit leur produit scalaire par :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$$

Lorsque l'un des vecteurs est nul, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$.

Exemple : soit $ABCD$ un tétr aèdre régulier de côté 4.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = 4 \times 4 \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 4 \times 4 \times \dfrac{1}{2} = \boxed{8}$.

VII.3 Différentes façons de calculer le produit scalaire

Propriétés

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{v}||\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
2. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
3. Un repère orthonormal dans l'espace étant choisi, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$, alors :

   $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = aa' + bb' + cc'$.

Les propriétés du produit scalaire de deux vecteurs de l'espace sont les mêmes que celles de deux vecteurs du plan.
En particulier : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

VIII Géométrie analytique

VIII.1 Distance dans l'espace

Une base oorthonormale de l'espace est $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ avec $||i|| = \left|\left|j\right|\right| = ||k|| = 1$ et $\vec{I}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{I}\cdots\vec{k} = 0$.

Propriété

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les points $A\left(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A\right)$ et $zB\left(x_zB\,;\,y_zB\,;\,z_zB\right)$.

Alors $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + \left(yy_B - x_B\right)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\left|\left|\vec{u}\right|\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

VIII.2 Équation d'une sphère

Propriété

Dans un repère orthonormé, la sphère $\mathscr{S}$ de centre A et de rayon r a pour équation

$$(x - x_A)^2 + \left(y - y_A\right)^2 + (z - z_A)^2 = r^2$$

Justification : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{S} \Leftrightarrow AM = r \Leftrightarrow AM^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - x_A)^2 + \left(y - y_A\right)^2 + (z - z_A)^2 = r^2$

VIII.3 Équation cartésienne d'un plan

Propriété

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et soit un point $A\left(x_A\,;\,yy_A\,;\,z_A\right)$.

Une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est

$$a(x - x_A) + b\left(y - y_A\right) + c(z - z_A) = 0.$$

Si l'un des trois nombres a, b ou c est non nul, $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Démonstration : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ d'où le résultat.

Exemples :

VIII.4 Projection orthogonale d'un point sur un plan

Définition

Soit $\mathscr{P}$ un plan de vecteur moral $\overrightarrow{n}$ et soit M un point extérieur au plan.
Le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$ est l'intersection de $\mathscr{P}$ et de la droite passant par M ayant $\overrightarrow{n}$ comme vecteur directeur.

Définition

On considère une droite d de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et un point M extérieur à cette droite.
Le projeté orthogonal de M sur cette droite d est l'intersection du plan normal à $\overrightarrow{u}$ passant par M avec la droite d.

VIII.5 Distance d'un point à un plan

Soient $\mathscr{P}$ un plan et A un point.
La distance de A à $\mathscr{P}$ notée $d(A\,;\,\mathscr{P})$ est la plus petite des distances AM où $M \in \mathscr{P}$.

Propriété

$d(A\,;\,\mathscr{P}) = AH$ où H est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.

Remarque : $A \in \mathscr{P} = 0 \Leftrightarrow d(A\,;\,\mathscr{P}) = 0$.

Propriété

Soit $\mathscr{P}$ un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et soit $A\left(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A\right)$ un point.
$d(A\mathscr{P}) = \dfrac{\left|ax_A+by_A+cz_A\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.