Combinatoire et dénombrement

Table des matières

Activité préparatoire A page 34

I Cardinaux des ensembles finis

I.1 Réunion et intersection

Définitions

Soit E un ensemble non vide.
Card (**E**) est le nombre d'éléments de E.
L' ensemble vide $\emptyset$ n'a pas d'élément.
Card (**E**) = 0.

.

Exemple : si $E\{1\ ;\ 2\ ;\ 5\}$, Card (E) = 3.

Définition

Soient deux événements A et B.

- On note $A \cap B$ l'intersection de A et de B, constituée des éventualités appartenant à A et à B.
- On note $A \cup B$ la réunion de A et de B, constituée des éventualités appartenant à A ou à B.

Définition

Deux ensembles A et B sont disjoints si leur intersection est vide (aucun élément en commun).
On écrit $A \cap B = \emptyset$.

Propriété

Card $(A \cup B) = \text{Card } (A) + \text{Card } (B) - \text{Card } (A \cap B)$

La justification vient du fait que quand on calcule Card (A) + Card (B), on compte deux fois les éléments communs, donc les éléments de l'intersection.

Propriété

Si A et B sont disjoints, Card $(A \cup B) = \text{Card } (A) + \text{Card } (B)$.

I.2 Produit cartésien d'ensembles

Définitions

Soient A et B deux ensembles non vides.
Le produit cartésien de A et B ; noté $A \times B$ (qui se lit A croix B) est l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ où x appartient à A et y à B.
$A \times B = \left\{(x\ ;\ y),\ x \in A,\ y \in B\right\}$

Exemple :
$A = \{1\ ;\ 2\}$ et $B = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$.
$A \times B = \{(1\ ;\ a)\ ;\ (1\ ;\ b)\ ;\ (1\ ;\ c)\ ;\ (2\ ;\ a)(2\ ;\ b)\ ;\ (2\ ;\ c)\}$

Remarque : Les coordonnées cartésiennes d'un point s'écrivent sous la forme $(x\ ;\ y)$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
On dit que $(x\ ;\ y)$ appartient au produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, qu'on écrit $\mathbb{R}^2$ par analogie avec la notation puissance.

Remarque : si A et B sont deux ensembles distincts, $A \times B \neq B \times A$.

Théorème

Soient A et B deux ensembles finis.
Card $(A \times B) = \text{Card } (A) \times \text{Card } B$.

Démonstration :
il suffit de faire un arbre pour compter le nombre de couples possibles.
Si $n = \text{Card } (A)$, nous avons n branches pour le choix du premier élément du couple.
Si $p = \text{Card } (B)$, de chaque branche tracée précédemment, il part p branches correspodant au choix du deuxième élément. Nous avons donc np branches au total.

Définition

Soient E_1, E_2, E_n n ensembles.
Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est l'ensemble des n- uplets de la forme $(a_1\ ;\ a_2\ ;\ \cdots a_n)$ où $a_i \in E_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Définition

Si A est un ensemble non vide, on appelle n-uplet de A un élément de A^n, donc de la forme $(a_1\ ;\ a_2\ ;\ \cdots\ ;\ a_n)$ où $a_i \in A$ pour tout i avec $1 \leqslant i \leqslant n$.

Vocabulaire : pour $n = 2$, on parle de couple ; Pour $n > 2$, on parle de triplet, quadruplet, quintuplet, sextuplet, ou plus généralement n-uplet.

Propriété

Card $\left(A^n\right) = [\text{Card}\ (A)]^n$.

Démonstration : se fait par récurrence.

- Le code PIN d'un téléphone portable est composé de quatre chiffres ; le nombre de codes possibles est $10^4 = 10\,000$.
- Un livre de recettes de cuisine propose 100 entrées, 100 plats et 100 desserts.
  Le livre annonce un million de menus possibles. A-t-il raison ?
  Oui : le nombre de menus possibles est $\left(10^2\right)^3 = 10^6 = 1\,000\,000$.

Activité B page 34

II Arrangements et permutations

II.1 Arrangements d'éléments d'un ensemble

Définition

Soit n un entier naturel non nul.
On appelle factorielle n, notée $n!$ le nombre défini par $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.
Par convention, on. pose $0! = 1$

On a donc :
$0! = 1$; $1! = 1$; $2! = 1 \times 2 = 2$; $3! = 1 \times 2 \times 3 = 2! \times 3 = 6$
$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 3! \times 4 = 24$; $5! = 4! \times 5 = 120$; $6! = 5! \times 6 = 720$

Remarque : il semble que les résultats successifs deviennent « vite » grands.
Donner une valeur approchée de 68!.
Même question avec 69! ; que se passe-t-il ?

Définition

Un arrangement de p éléments d'un ensemble E de n éléments ($p \leqslant n$) est un p-uplet d'éléments **distincts** de E (liste **ordonnée**).

Exemple : $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\ ;\ e\}$.
Des arrangements de 3 éléments de E sont par exemple :
$\{a\ ;\ b\ ;\ c\}$, $\{b\ ;\ a\ ;\ c\}$, $\{c\ ;\ a\ ;\ b\}$, $\{a\ ;\ c\ ;\ e\}$

Ce qui seraint bien est de savoir cmbien il y a de tels arrangements.

Propriété

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble de n éléments est :
$A_n^p = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times (n-p+1)$.
Remarque : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Démonstration :

On imagine un arbre donnant la liste de tous les arrangements possibles ; il faut alors compter le nombre de branches finales.
On peut imaginer un meuble avec p tiroirs dans lesquels on veut ranger p objets parmi n (qu'on peut voir comme $(n-0)$).
On a n choix possibles pour le premier objet ; ce premier objet étant choisi, il y a $(n-1)$ possibilités pour ce deuxième objet. Le nombre de choix possibles pour le troisième objet est $(n-2)$.
Le nombre de choix pour le p-ième emplacement est $n-(p-1) = n+p+1$ (puisque l'on a déjà choisi $p-1$ objets).
Par principe multiplicatif, on a bien :

$$A_n^p = n(n-1) \times \cdots \times (n-p+1).$$

- $n! = n(n+1)(n-2)(n-p+1)(n-p)(n-p-1) \times \cdots \times 2 \times 1$
- $(n-p)! = (n-p)(n-p-1) times \cdots \times 2 \times 1$.
- On en déduit que $\dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = A_n^p$

L'écriture avec les factorielles sert plutot pour des calculs théoriques et celle avec les produits dans des calculs « à la main ».

Exemples :

1. On considère une course de 17 chevaux ; on s'intéresse au tiercé, c'est-à-dire à l'ordre des trois premiers chevaux à l'arrivée.
   Quelqu'un qui ne con aît rien aux chevaux et qui veut être sûr de toucher le tiercé dans l'ordre souhaite parier sur toutes les arrivées possibles.
   Le nombte de « tiercés » possibles est $A_{17}^3 = 17 \times 16 \times 15 = 4\,080$.

2. Les affiliés d'un club doivent élire un président, un vice-président et un trésorier, parmi n candidats. Sachant que tous les candidats se présentent à tous les postes, et que les fonctions sont non-cumulables, combien y a-t-il de possibilités :

   a) Pour n = 3 ?

   b) Pour n = 6 ?

   c) Pour n = 10 ?

   d) Pour n = 101 ?

   Solutions : on calcule $A_n^3 = n(n-1(n-2))$ pour les différentes valeurs de n

III Combinaisons, coefficients binomiaux

III.1 Parties d'un ensemble fini

Définition

une partie d'un ensemble fini E est unb sous-ensemble de E.

Exemple : soit $E = \{1 ; 2 ; 3\}$.

- $\{1 ; 3\}$, $\varnothing$ et E sont des parties de E.
- L'ensemble des parties de E, qu'on note $\mathscr{P}(E)$ est : $P(E) = \{\varnothing ; \{1\} ; \{2\} ; \{3\} ; \{1 ; 2\} ; \{1 ; 3\} ; \{2 ; 3\} ; \{1 ; 2 ; 3\}\}$

Propriété

Soit E un ensemble de n éléments.
Alors $\text{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$

Démonstration : On veut déterminer une partie A de E ; à chaque élément de E, on associe le nombre 0 si cet élément n'appartient pas à A et 1 s'il appartient à A.
Le nombre de parties de $\mathscr{P}(E)$ est donc le nombre de n-uplets de E, soit 2^n.

III.2 Combinaisons

Définition

Soit E un ensemble de n éléments ; oon appelle combinaison de p éléments de E tout sous-ensemble de p éléments. On ne tient donc pas compte de l'ordre.

Exemple : Soit $E = \{a ; b ; c ; d\}$.
Une combinaison de 3 éléments est par exemple $\{a ; b ; d\}$. Le sous-ensemble {b ; ; a ; d} est le même puisque l'ordre ne compte pas.

III.3 Coefficient binomial

Définition

Soit E un ensemble de n éléments. On appelle coefficient binomial $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p éléments parmi les n éléments de E.

Propriété

Pour $0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Démonstration :
Chaque combinaison de p éléments correspond à $p!$ arrangements de ces p éléments.
On a donc $\binom{n}{p} \times p! = A_n^p$ donc $\binom{n}{p} = \dfrac{A_n^p}{p!}$.
On en déduit $\binom{n}{p} = \dfrac{n(n-1)\times\cdots(n-p+1)}{p(p-1)(p-2)\times\cdots\times 2\times 1}$. (avec p facteurs au numérateur et p facteurs au dénominateur).

Ainsi : $\binom{10}{3} = \dfrac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = 120$.

Remarques :

- $\binom{n}{p}$ est toujours un entier naturel.
- Par définition, si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$ (on ne peut pasa voir de sous-esnemble plus grands que l'ensemble lui-même).
- $\binom{n}{0} = 1$ (il n'y a qu'un semble vide).
- $\binom{n}{n} = 1$(il n'y a qu'un sous ensemble de n éléments, E lui-même.)
- $\binom{n}{1} = n$ (car il y a n sous-ensembles possibles de 1 élément)
- De même : $\binom{n}{n-1} = 1$
- Les coefficients binomiaux et le nombre d'arrangements peut se calculer à la calculatrice.

Exemples :

1. Dans un jeu de 52 cartes, le nombre de « mains » de 5 cartes est $\binom{52}{5}$=2 598 960.

2. Une grille contient les dix nombres entiers de 0 à 9 et et les six lettres de A à F.
On demande de choisir trois nombres et deux lettres.
Le nombre de combinaisons possibles de trois nombres est $\binom{10}{3}$ et celui de deux lettres est $\binom{6}{2}$.
Le nombre de choix possiobles est donc $\binom{10}{3} \times \binom{6}{2} = 120 \times 15 = 1\,800$.
Il y a donc 1 800 grilles possibles.

Propriétés

- Soit $k \leqslant n$; alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

- Relation de Pascal : si $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Démonstration :

- Par définition, $\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles de k éléments choisis parmi n.
Mais choisir k éléments revient à choisir les $n-k$ éléments restants ; il y a donc autant de sous-ensemblesà $n-k$ d'où $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

- On considère un ensemble de n dans lequel on privilégie un élement appelé α.
$\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles contenant k éléments.
On les sépare en deux catégories :
  - ceux qui contiennent α : cela revient à choisir $k-1$ éléments parmi $n-1$ puisque α fait partie des k éléments. Il y en a donc $\binom{n-1}{k-1}$.
  - ceux qui ne contiennent pas α : cela revient à choisir k éléments parmi $n-1$ puisque α ne fait pas partie des k éléments à choisir. Il y en a donc $\binom{n-1}{k}$.

  On a donc bien $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

III.4 Triangle de Pascal

Nous avons déjà vu deux façons de calculer les coefficients binomiaux.
Le triangle de Pascal (basé sur la relation de Pascal) donne un moyen simple et rapide de calculer les coefficients binomiaux de proche en proche.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Exemple : $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10$ donc $\boxed{\binom{5}{2} = 10}$.

Remarque : dans le triangle de Paascal, on remarque que la somme des coefficients binomiaux d'une même ligne est une puissance de 2 et vaut 2^n.

Propriété

Soit n un entier naturel. $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Démonstration : Soit E un ensemble à n éléments..
Notons $a_k = \binom{n}{k}$; c'est le cardinal de l'ensemble A_k des parties de E constituées de k éléments de E.
$\mathscr{P}(E) = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_n$.
Alors $2^n = \text{Card}\,(\mathscr{P}(E)) = \text{Card}\,(A_0) + \text{Card}\,(A_1) + \cdots \text{Card}\,(A_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \text{Card}\,(A_k) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}$.

Remarque :
Les **coefficients binomiaux** apparaissent dans le développement du **binôme** de Newton $(a+b)^n$.
$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n$.
Par exemple : $\boxed{(a+b)^3 + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$.

Avec $a = b = 1$, on retrouve le résultat précédent.