

Exercices sur les probabilités conditionnelles

I Extrait bac ES centres étrangers juin 2019

On s'intéresse à la clientèle d'un musée.

Chaque visiteur peut acheter son billet sur internet avant sa visite ou l'acheter aux caisses du musée à son arrivée.

Pour l'instant, la location d'un audioguide pour la visite n'est possible qu'aux caisses du musée. Le directeur s'interroge sur la pertinence de proposer la réservation des audioguides sur internet. Une étude est réalisée. Elle révèle que :

- 70 % des clients achètent leur billet sur internet;
- parmi les clients achetant leur billet sur internet, 35 % choisissent à leur arrivée au musée une visite avec un audioguide;
- parmi les clients achetant leur billet aux caisses du musée, 55 % choisissent une visite avec un audioguide.

On choisit au hasard un client du musée. On considère les événements suivants :

- A : « Le client choisit une visite avec un audioguide »;
- B : « Le client achète son billet sur internet avant sa visite ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité que le client choisisse une visite avec un audioguide est égale à 0,41.
3. On s'intéresse aux clients qui visitent le musée avec un audioguide.

Si plus de la moitié d'entre eux ont acheté leur billet sur internet alors le directeur proposera à l'avenir la location de l'audioguide sur le site Internet du musée.

D'après les résultats de cette étude, que va décider le directeur? Justifier la réponse.

II Bac S Polynésie septembre 2002

Une compagnie d'assurance automobile fait un bilan des frais d'intervention, parmi ses dossiers d'accidents de la circulation.

- 85% des dossiers entraînent des frais de réparation matérielle.
- 20% des dossiers entraînent des frais de dommages corporels.
- 12% des dossiers entraînant des frais de réparation matérielle entraînent aussi des frais de dommages corporels.

Soit les événements suivants :

R : le dossier traité entraîne des frais de réparation matérielle

D : le dossier traité entraîne des frais de dommages corporels.

1. En utilisant les notations R et D , exprimer les trois pourcentages de l'énoncé en termes de probabilités; les résultats seront donnés sous forme décimale.
2. Calculer la probabilité pour qu'un dossier :
 - (a) entraîne des frais de réparation matérielle et des frais de dommages corporels;
 - (b) entraîne seulement des frais de réparation matérielle;
 - (c) entraîne seulement des frais de dommages corporels;
 - (d) n'entraîne ni frais de réparation matérielle ni frais de dommages corporels;

(e) entraîne des frais de réparation matérielle sachant qu'il entraîne des frais de dommages corporels.

3. On constate que 40 % des dossiers traités correspondent à des excès de vitesse et parmi ces derniers 60 % entraînent des frais de dommages corporels.

- (a) On choisit un dossier; quelle est la probabilité pour que ce dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels?
- (b) On choisit cinq dossiers de façon indépendante. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels.

III Bac S Antilles Guyane septembre 2002

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}.$$

- (a) Soit la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{5}$; montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
- (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n .

2. On considère deux dés, notés A et B. Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.

On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.

On désigne par A_n l'évènement « on utilise le dé A au n -ième lancer »,

par $\overline{A_n}$ l'évènement contraire de A_n ,

par R_n l'évènement « on obtient rouge au n -ième lancer »,

par $\overline{R_n}$ l'évènement contraire de R_n ,

par a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n .

- (a) Déterminer a_1 .
- (b) Déterminer r_1 . Pour cela, on pourra s'aider d'un arbre.
- (c) En remarquant que, pour tout $n \geq 1$,
$$R_n = (R_n \cap R_n) \cup (\overline{R_n} \cap \overline{R_n}),$$
montrer que

$$r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}.$$

- (d) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n}).$$
- (e) En déduire que, pour tout $n \geq 1$,
$$a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3},$$
puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n .
- (f) En déduire l'expression de r_n en fonction de n puis la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$.