BACCALAURÉAT BLANC

février 2020

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée, mais pas le prêt entre candidats

L'élève doit traiter les quatre exercices, l'exercice 2 étant différent suivant l'enseignement de spécialité suivi.

L'exercice 2 pour les élèves **ne suivant pas la spécialité mathématiques** se trouve en page 3

L'exercice 2 pour les élèves **suivant la spécialité mathématique** commence en page 3 et se poursuit en page 4

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice I (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A :

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1$^{\text{er}}$ niveau, 75 vont au 2$^{\text{e}}$ niveau et 100 vont au 3$^{\text{e}}$ niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2$^{\text{e}}$ niveau, les autres vont au 1$^{\text{er}}$ niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population. On pourra considérer les évènements suivants :

- E : « La personne emprunte l'escalier. »
- N_1 : « La personne va au premier niveau ».
- N_2 :« La personne va au deuxième niveau ».
- N_3 : « La personne va au troisième niveau ».

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a. Montrer que la probabilité que la personne aille au 2$^{\text{e}}$ niveau par l'escalier est égale à $\frac{1}{12}$.

   b. Montrer que les évènements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.

   c. Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2$^{\text{e}}$ niveau.
3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.
   On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2e niveau.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

   b. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2$^{\text{e}}$ niveau.

   c. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité qu'au moins une personne se rende au 2$^{\text{e}}$ niveau.

   d. En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2$^{\text{e}}$ niveau ?

Partie B :

On considère une mobylette qui n'est pas en très bon état.
Soit A l'événement « la mobylette tombe en panne de moteur » et B l'événement « la mobylette a une crevaison ».
On a $p(A) = 0,06$ et $p(B) = 0,05$.
On estime que les événements A et B sont indépendants.
Quelle est la probabilité que la mobylette soit en état de marche, c'est-à-dire qu'elle n'ait ni une panne de moteur ni une crevaison ?

Exercice II Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité. (5 points)

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.

On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n). Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$,
- pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$,
- pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2.
2. Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.
   On a en particulier $s_1 = u_0$.
   a. Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.
   b. En déduire que pour tout entier $n > 0$,
   $$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}.$$
   c. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 1$.
3. À l'aide de l'algorithme ci-contre, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n donnée.
   a. Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-contre.
   b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

   Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

Entrée :	Saisir n
	Saisir u
Traitement :	s prend la valeur u
	Pour i allant de 1 à n :
	u prend la valeur ...
	s prend la valeur ...
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u

4. a. Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.
   b. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).

Exercice II : Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité. (5 points)

L'exercice de spécialité est à faire sur une copie séparée.

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance, le rang du mois dans l'année.
Par exemple, pour une personne née le 14 mai, le numéro du jour de naissance est 14 et le numéro du mois de naissance est 5.

Partie A

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :
« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire. »
Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1er août ! »

1. Vérifier que pour une personne née le 1^{er} août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.

2. a. Pour un spectateur donné, on note j le numéro de son jour de naissance, m celui de son mois de naissance et z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).
Exprimer z en fonction de j et de m et démontrer que z et m sont congrus modulo 12.
   b. Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul (A).

Partie B

Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul (programme B) : pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m, le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z = 12j + 31m$.
Dans les questions suivantes, on étudie différentes méthodes permettant de retrouver la date d'anniversaire du spectateur.

1. **Première méthode**
On considère l'algorithme suivant :

	Algorithme
Variables	j et m sont des entiers naturels
Traitement	Pour m allant de 1 à 12 faire : Pour j allant de 1 à 31 faire : z prend la valeur $12j + 31m$ Afficher z Fin Pour Fin Pour

Modifier cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs dej et de m telles que $12j + 31m = 503$.

2. **Deuxième méthode**
   a. Démontrer que $7m$ et z ont le même reste dans la division euclidienne par 12.
   b. Pour m variant de 1 à 12, donner le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12.
   c. En déduire la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

3. **Troisième méthode**
   a. Démontrer que le couple (-2 ; 17) est solution de l'équation $12x + 31y = 503$.
   b. En déduire que si un couple d'entiers relatifs$(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$, alors $12(x + 2) = 31(17 - y)$.
   c. Déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$, solutions de l'équation $12x + 31y = 503$.
   d. Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs$(x\ ;\ y)$ tel que $1 \leqslant y \leqslant 12$.
En déduire la date d'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme (B).

Exercice III **(5 points)**

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.
Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à 2,5 μg/mL
Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.
On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geqslant 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en μg/mL) dans le sang en fonction du temps t (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

1. a. Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t=0$?
   b. Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.
   c. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$. Vérifier que pour tout nombre réel t positif,
$$f'(t)=\frac{3}{4}(4-t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}.$$
3. a. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$ (en incluant la limite en $+\infty$).
   b. À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ?
   Quel est alors ce taux ? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. a. Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 appartenant à $[0\ ;\ 4]$ telle que $f(t_0)=2,5$.
   En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

   On admet qu'il existe une unique valeur t_1 appartenant à $[4\ ;\ +\infty[$ vérifiant $f(t_1)=2,5$. On donne une valeur approchée de t_1 à 10^{-3} près : $t_1\approx 18,930$.
   b. Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5 μg/mL dans le sang.

Exercice IV (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

1. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a $-3\leqslant f(x)\leqslant 3$.
   En déduire la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$.
2. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x+\pi)=f(x)$.
   En déduire que f est périodique et préciser sa période.
3. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f'(x)=-6\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.
4. a. Monter que si $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$, $2x+\frac{\pi}{2}\in[0\ ;\ \pi]$.
   En déduire le signe de f' sur $\left[-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$.
   b. Etudier le signe de f' sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right]$.
   c. En déduire le tableau de variation de f sur $\left[\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right]$.
5. Donner l'équation de la tangente à f au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.