Devoir surveillé de mathématiques
Terminale S - Durée 4h
Calculatrices autorisées

Ce sujet comporte 4 exercices indépendants répartis sur 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5. La dernière page est une annexe à rendre avec la copie, même non complétée.
Pour toutes les questions, la précision et la clarté des raisonnements sera prise en compte dans la notation.
Toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse, sera valorisée.

EXERCICE I **(5 points)**

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} & = & \frac{1}{5}u_n + 3\times 0,5^n. \end{array}\right.$$

1. (a) Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

   (b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. (a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a $u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0,5^n$.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

   (c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).
   Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10\times 0,5^n$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

   (b) En déduire, que pour tout entier naturel n, $u_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0,5^n$.

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0,01$.

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	$n \leftarrow 0$	
	$u \leftarrow 2$	
Traitement :	Tant que ...	(1)
	$n \leftarrow$ ...	(2)
	$u \leftarrow$ ...	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

EXERCICE II **(5 points)**

Partie A

Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Calculer $u'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction u.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$.
3. En déduire le signe de $u(x)$ selon les valeurs de x.
4. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3}.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.

1. Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{u(x)}{\left(1+x^3\right)^2}$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $]-1\,;\,+\infty[$
4. En remarquant que $2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 1 = 0$, montrer que $f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^2)}$.

Partie C

Soit les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ et $h(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

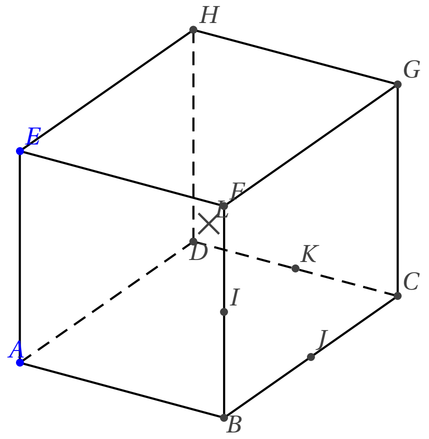
1. Conjecturer avec une calculatrice les positions des courbes représentatives des fonctions g et h.
2. Montrer que $g(x) - h(x) = \frac{u(x)}{2x}$ puis, dresser un tableau de signes de $(g-h)(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.
   Le résultat est-il conforme à la conjecture ?

EXERCICE III (5 points)

Les parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Soient M et N deux points de l'espace.
Le **plan médiateur** d'un segment [MN] de l'espace est l'ensemble des points de l'espace P équidistants de M et N ; c'est donc l'ensemble des points P de l'espace tels que MP = NP.

Soit ABCDEFGH un cube de côté 1. Le point I est le milieu du segment [BF].
Le point J est le milieu du segment [BC]. Le point K est le milieu du segment [CD].
Une figure ci-dessous représente la situation.



Partie A : construction d'une section

Construire la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJE) sur la figure fournie en annexe. On laissera les traits de construction apparents. Aucune justification n'est demandée.

Partie B : démonstration d'une propriété de l'espace.

On souhaite démontrer ici la proposition $\mathscr{P}$:

> **Proposition $\mathscr{P}$**
> Soient M et N deux points de l'espace. Soient P et Q deux points du plan médiateur du segment [MN].
> La droite (PQ) est orthogonale à la droite (MN).

Soient P et Q deux points du plan médiateur d'un segment [MN]. Soit I le milieu du segment [MN]

1. Montrer que la droite (MN) est orthogonale à la droite (PI).

On admet que la droite (MN) est orthogonale à la droite (QI).

2. En déduire que la droite (MN) est orthogonale au plan (PQI).
3. En déduire la proposition $\mathscr{P}$.

Partie C : Une application

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$. On considère à nouveau le cube défini précédemment.

1. Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.
2. (a) Montrer que A et G appartiennent au plan médiateur de [IJ].
   (b) On admet de même que A et G appartiennent au plan médiateur de [JK]. En utilisant la propriété $\mathscr{P}$ énoncée à la partie B, montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (IJK).
3. On appelle L le centre du cube ABCDEFGH.
   (a) Montrer que les points L, I, J et K sont coplanaires.

   Honte à moi, je ne vois pas comment montrer que IL, I, J et K sont coplanaires !

   (b) Vérifier que les points A, L et G sont alignés puis calculer le volume du tétraèdre AIJK.

EXERCICE IV (5 points)

Uniquement pour les élèves qui ne suivent pas l'enseignement de spécialité

Soit n un entier naturel. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $I = [0;1]$ par $f_n(x) = \dfrac{1 - nx^2 + x^3}{1 + x^2}$.
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère du plan. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$.
Le graphique donné en annexe représente la droite $\mathscr{D}$ et les courbes $\mathscr{C}_n$ pour $n \in \{0;1;2;3;4\}$.
En considérant ce graphique, il semble que $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{D}$ s'intersectent en un unique point $M_n(x_n, x_n)$.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite (x_n).

1. (a) Conjecturer le sens de variation de la suite (x_n). Expliquer la démarche.
   (b) La suite (x_n) semble-t-elle être convergente ?
2. **Dans cette question, on suppose que** $n = 0$**.** On s'ntéresse donc à la fonction f_0 définie sur I par $f_0(x) = \dfrac{1 + x^3}{1 + x^2}$.
   (a) Résoudre l'équation $f_0(x) = x$ sur l'intervalle I.
   (b) En déduire que $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{D}$ ont un unique point d'intersection M_0 dont on déterminera les coordonnées.

Dans toute la suite, on admet que la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}_n$ ont un unique point d'intersection M_n et on note x_n l'abscisse de M_n.

Soit n un entier naturel non nul.

3. (a) Résoudre l'équation (E_n) ; $nx^2 + x - 1 = 0$ sur l'intervalle I.
   (b) Déterminer deux réels a_n et b_n tels que, pour tout réel x de l'intervalle I, $f_n(x) = x - a_n + \dfrac{b_n - x}{1 + x^2}$.
   On exprimera a_n et b_n en fonction de n.
   (c) Montrer que l'équation $f_n(x) = x$ est équivalente à l'équation (E_n).
   (d) Exprimer alors x_n en fonction de n.
   (e) En déduire le sens de variation de la suite (x_n) et sa limite.

EXERCICE V (5 points)

Uniquement pour les élèves qui suvent l'enseignement de spécialité

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que

$$\begin{cases} N \equiv 5 \quad (13) \\ N \equiv 1 \quad (17) \end{cases}$$

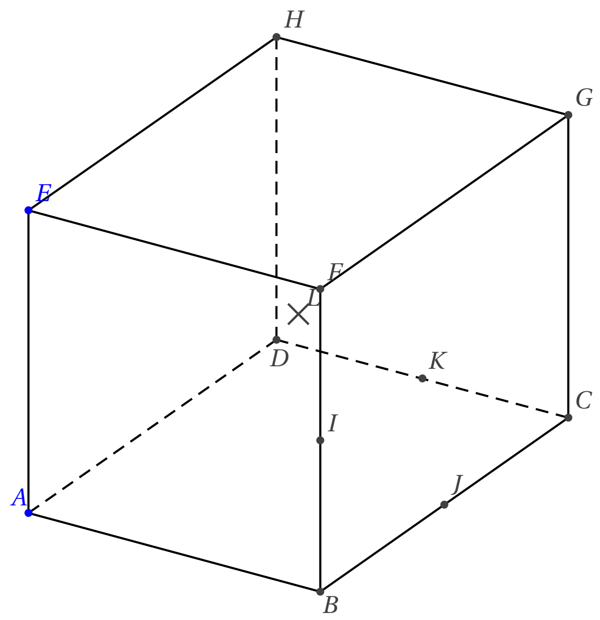
   (a) Vérifier que 239 est solution de ce système.
   (b) Soit N un entier relatif solution de ce système.
   Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.
   (c) Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.
   (d) En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.
   (e) Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18 \quad (221)$ et $\begin{cases} N \equiv 5 \quad (13) \\ N \equiv 1 \quad (17) \end{cases}$.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   (a) Existe-t-il un entier naturel k tel que $10^k \equiv 1 \quad (17)$?
   (b) Existe-t-il un entier naturel l tel que $10^l \equiv 18 \quad (221)$?

Annexe à rendre avec la copie

ANNEXE À L' EXERCICE III

Construire la section du cube par le plan (IJE).



ANNEXE À L' EXERCICE IV

Ne concerne que les candidats qui ne suivent pas l'enseignement de spécialité

Représentation graphique des courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ et de la droite d'équation $y = x$.