Devoir sur feuille n° 5

Exercice I

Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les points d'affixes 1, z^2 et $\dfrac{1}{z}$ soient alignés.

Sur le graphique fourni en fin d'exercice, le point A a pour affixe 1.

Partie A : étude d'exemples

1. **Un premier exemple**

   Dans cette question, on pose $z = \mathrm{i}$.

   (a) Donner la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\dfrac{1}{z}$.

   (b) Placer les points N_1 d'affixe z^2, et P_1 d'affixe $\dfrac{1}{z}$ sur le graphique donné enfin d'exercice.

   On remarque que dans ce cas les points A, N_1 et P_1 ne sont pas alignés.

2. **Une équation**

   Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2 + z + 1 = 0$.

3. **Un deuxième exemple**

   Dans cette question, on pose : $z = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   (a) Déterminer la forme exponentielle de z, puis celles des nombres complexes z^2 et $\dfrac{1}{z}$.

   (b) Placer les points N_2 d'affixe z^2 et P_2, d'affixe $\dfrac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.

   On remarque que dans, ce cas les points A, N_2 et P_2 sont alignés.

Partie B

Soit z un nombre complexe non nul.

On note N le point d'affixe z^2 et P le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

1. Établir que, pour tout nombre complexe différent de 0, on a :

$$z^2 - \frac{1}{z} = \left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$

2. On rappelle que si, $\overrightarrow{U}$ est un vecteur non nul et $\overrightarrow{V}$ un vecteur d'affixes respectives $z_{\overrightarrow{U}}$ et $z_{\overrightarrow{V}}$, les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $z_{\overrightarrow{V}} = k z_{\overrightarrow{U}}$.

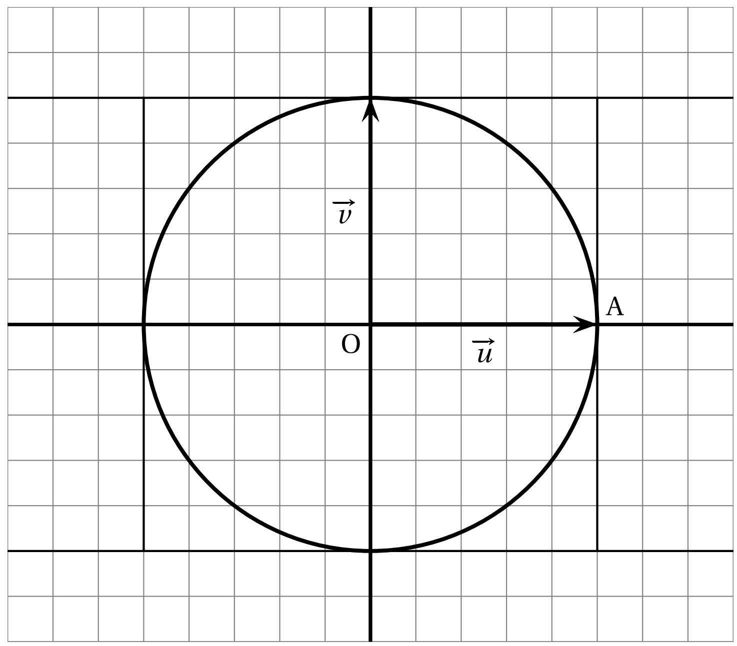
   En déduire que, pour $z \neq 0$, les points A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.

3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$, où x et y désignent des nombres réels.

   Justifier que : $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + \mathrm{i}(2xy + y)$.

4. (a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés.

   (b) Tracer cet ensemble de points sur le graphique donné ci-dessous.



Exercice II

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

On considère le nombre complexe $c = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et les points S et T d'affixes respectives c^2 et $\dfrac{1}{c}$.

1. **Affirmation 1 :**

   Le nombre c peut s'écrire $c = \dfrac{1}{4}\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)$.

2. **Affirmation 2 :**

   Pour tout entier naturel n, c^{3n} est un nombre réel.

3. **Affirmation 3 :**

   Les points O, S et T sont alignés.

4. **Affirmation 4 :**
Pour tout entier naturel non nul n,

$$|c| + \left|c^2\right| + \ldots + \left|c^n\right| = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Exercice III

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$.
   (a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   (d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.
   (a) Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
   (b) Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -4t-2 \\ y & = & t \\ z & = & 3t+2 \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}$.
   (c) La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice IV

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kx\mathrm{e}^{-kx}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$.

Partie A : Étude du cas $k = 1$

On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

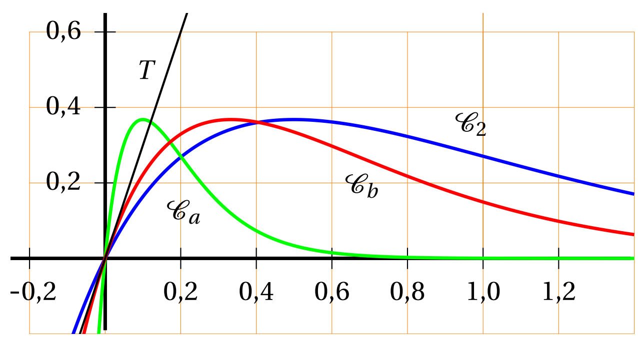
1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}_1$ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que la fonction g_1 définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$g_1(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$$

   est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
4. Étudier le signe de $f_1(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
5. (**question à ne pas traiter**)) ~~Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 10$.~~

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_a$ et $\mathscr{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathscr{C}_b$ au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathscr{C}_k$ passent par un même point.
2. (a) Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f_k'(x) = k(1-kx)\mathrm{e}^{-kx}.$$

   (b) Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.
   (c) En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.
   (d) Écrire une équation de la tangente à $\mathscr{C}_k$ au point O origine du repère.
   (e) En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.