TS : devoir sur feuille n° 3

I

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante :
pour tout entier naturel n non nul,

$$x_{n+1} - x_n = 0,24x_{n-1}.$$

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$.
   Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$.
   En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).

   On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme :

   $$u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n$$

   où α et β sont deux réels.
2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E).
   Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6,6$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n,

   $$u_n = \frac{39}{7}(1,2)^n + \frac{3}{7}(-0,2)^n.$$

3. Determiner $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$f(x) = 1,4x - 0,05x^2.$$

   (a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;8]$.

   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
   $0 \leqslant< v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.
2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

II

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé (quelconque) et soit f_n la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}.$$

1. (a) Expliquer pourquoi f_n est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et calculer $f_n'(x)$.

   (b) Montrer que $f_n'(x) = \dfrac{n(1+x)^{n-1}\left(x^{n-1}-1\right)}{(1+x)^{2n}}$.

   (c) Étudier le signe de $f_n'(x)$ et montrer que f_n atteint un minimum que l'on déterminera.
2. (a) En déduire l'inégalité suivante :

   $$(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}\left(1+x^n\right).$$

   (b) En déduire que, si x et y sont des réels positifs,

   $$(x+y)^n \leqslant 2^{n-1}\left(x^n+y^n\right).$$

III

Un chirurgien orthopédique commande des prothèses chez trois fabricants A, B et C. le tiers des prothèses provient de A, 30 % provient de B et le reste provient de C.
La proportion de prothèses défectueuses est de 0,3 % chez A, de 0,6 % chez B et de 0,5 % chez C.
On prend au hasard la fiche d'un patient qui s'est fait poser une prothèse chez ce médecin.
Quelle est la probabilité que cette prothèses soit défectueuse ?

IV

On sait que 1 % d'une population est atteinte d'une certaine maladie orpheline.
On dispose de test de dépistage de cette maladie ainsi que des données suivantes :

- si la personne est atteinte de cette maladie, alors le test est positif dans 90 % des cas.
- si la personne n'est pas atteinte par cette maladie, alors le test est néanmoins positif dans 5 % des cas.

On choisit une personne au hasard.
On note :

- M l'événement : « La personne est malade. ».
- T l'événement : « Le test est positif. ».

1. Traduire les hypothèses en termes de probabilités.
2. Faire un arbre pondéré représentant la situation.
3. (a) Calculer $p(M \cap T)$ et $p\left(\overline{M} \cap T\right)$.

   (b) Calculer $p(T)$.
4. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement atteinte par cette maladie sachant que son test est positif ?
5. Quelle est la probabilité qu'une personne ne soit pas atteinte par cette maladie sachant que son test est positif ?
6. Quelle est la probabilité qu'une personne soit atteinte par cette maladie sachant que son test est négatif ?

V

Soit $a \geq 1$ un nombre réel. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{u_n} + u_n\right)$.
On désire calculer une valeur approchée de $\sqrt{a}$ (méthode de Héron d'Alexandrie, mathématicien grec du 1er siècle après J.C.).

Première partie

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

1. Étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire que, pour tout $x \in \left[\sqrt{a}\,;\,a\right]$: $f(x) \in \left[\sqrt{a}\,;\,a\right]$.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

   (b) Montrer que la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{a}$.

   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. Montrer que la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. En déduire ℓ.

Deuxième partie(facultative) : vitesse de convergence

On prend désormais **a** = **2** et on pose $v_n = u_n - \sqrt{2}$.
v_n mesure donc l'écart entre u_n et $\sqrt{2}$.

1. Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Prouver par récurrence que $v_n \leq \dfrac{1}{2^{2^n}}$ pour tout entier $n \geq 1$.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'itérations on est sûr que u_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-9} près.