TS : devoir sur feuille n° 2

« La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques. » (Blaise Pascal)

I

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer la valeur exacte de u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Quelle conjecture peut-on faire quant la formule explicite de u_n ?
3. Démontrer cette conjecture.

II

On considère la suite $(_n)$ définie pour tout entier nature n non nul dont on donne quelques termes :
$u_1 = 0,1$; $u_2 = 0,12$; $u_3 = 0,123$;
$u_{10} = 0,12345678910$; $u_{11} = 0,1234567891011$.

1. Donner la valeur de u_5 et de u_{13}.
2. Démontrer que cette suite est convergente.

III Vrai ou Faux ?

Dire pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Si $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
2. Si $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1$, alors $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
3. Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to +\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$.
4. Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to 1} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$.
5. Si $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to 1} \big(f(x) - g(x)\big) = -\infty$.

IV

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n+2}{2u_n+1}.$$

On admet que pour tout entier naturel $n, u_n > 0$.

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
   (b) Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
   (c) Établir que pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n+1}{2u_n+1}.$$
   (d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1}$.
   (a) Établir que pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = \dfrac{-u_n+1}{3u_n+3}$.
   (b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) On admet que pour tout entier naturel $n, u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.
   Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

V

Soit u_n la suite définie sur N* par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Démontrer que pour $m \geqslant 1$, $u_{2m} - u_m \geqslant \dfrac{1}{2}$ [1]
3. Écrire l'inégalité [1] successivement pour $m = 1$, $m = 2$, $m = 4$, $m = 8$, ..., $m = 2^{n-1}$ puis additionner membre à membre ces inégalités.
   (a) En déduire que $u_{2^n} \geqslant 1 + \dfrac{n}{2}$.
   (b) En déduire que la suite u n'est pas majorée et déterminer la limite de la suite u.

VI

On considère un cube ABCDEFCH donné en annexe, page suivante (à rendre avec la copie).

On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

Partie A : Section du cube par le plan (M NP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
   Construire le point L
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   Construire les points Tet Q en laissant apparents les traits de construction.
   Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Annexe à l'exercice VI