Calcul d’une intégrale à l’aide d’une primitive

Formule

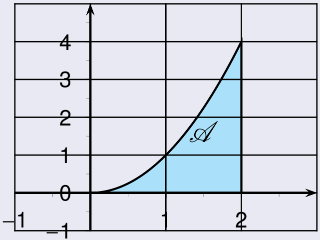
D'après le cours ; si f est continue sur [a ; b],
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est n'importe quelle primitive de f.

Formule

D'après le cours ; si f est continue sur [a ; b], $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est n'importe quelle primitive de f.

Exemple 1

Soit f la fonction carré sur $[0\,;\ 2]$; on veut calculer l'aire du domaine limité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droitesz d'équations $x = 0$ et $x = 2$ (partie en bleu ci-dessous)



On n'a pas de formule donnant cette aire, donc on doit calculer une intégrale.
$\mathscr{A} = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $f(x) = x^2$.

On n'a pas de formule donnant cette aire, donc on doit calculer une intégrale.
$\mathscr{A} = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $f(x) = x^2$.

Une primitive de f est F avec $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

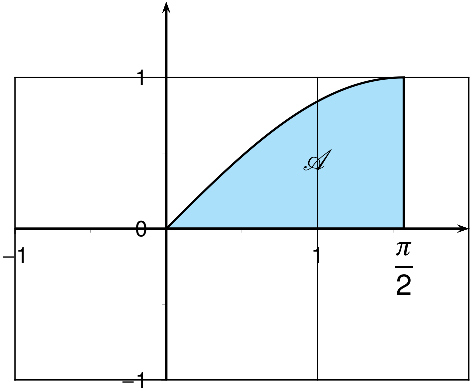
On n'a pas de formule donnant cette aire, donc on doit calculer une intégrale.

$\mathscr{A} = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $f(x) = x^2$.

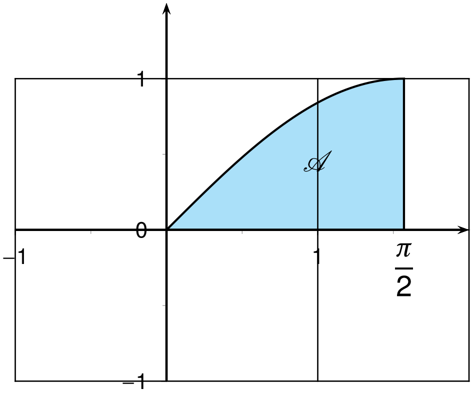
Une primitive de f est F avec $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

Alors : $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = F(2) - F(0) = \dfrac{2^3}{3} - \dfrac{0^3}{3} = \dfrac{8}{3}$ u.a.

On veut calculer l'aire du domaine limité par la courbe représentative de la fonction $\sin$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$ (partie bleue ci-dessous).



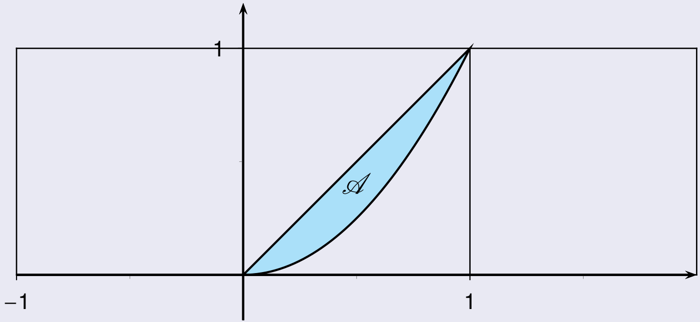
On veut calculer l'aire du domaine limité par la courbe représentative de la fonction sin, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$ (partie bleue ci-dessous).



$$\mathscr{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, \mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) = 1 \text{ u.a.}$$

Aire entre deux courbes

On veut calculer l'aire de la partie du plan limitée par la droite d'équation $y = x$, la courbe représentative de la fonction carré et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ (partie bleue ci-dessous).



Une intégrale permet de calculer l'aire comprise entre une courbe et l'axe des abscisses. L'aire cherchée va donc se calculer comme différence de deux aires : $\mathscr{A} = \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ étant l'aire entre la courbe représentative de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = x$ et l'axe des abscisses et $\mathscr{A}$ l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f_2 avec $f_2(x) = x^2$.

Une intégrale permet de calculer l'aire comprise entre une courbe et l'axe des abscisses. L'aire cherchée va donc se calculer comme différence de deux aires : $\mathscr{A} = \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ étant l'aire entre la courbe représentative de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = x$ et l'axe des abscisses et $\mathscr{A}$ l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f_2 avec $f_2(x) = x^2$.

Une primitive de f_1 est F_1 avec $F_1(x) = \dfrac{x^2}{2}$; une primitive de f_2 est F_2 avec $F_2(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

Une intégrale permet de calculer l'aire comprise entre une courbe et l'axe des abscisses. L'aire cherchée va donc se calculer comme différence de deux aires : $\mathscr{A} = \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ étant l'aire entre la courbe représentative de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = x$ et l'axe des abscisses et $\mathscr{A}$ l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f_2 avec $f_2(x) = x^2$.

Une primitive de f_1 est F_1 avec $F_1(x) = \dfrac{x^2}{2}$; une primitive de f_2 est F_2 avec $F_2(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

$\mathscr{A}_1 = F_1(1) - F_1(0) = \dfrac{1}{2}$

Une intégrale permet de calculer l'aire comprise entre une courbe et l'axe des abscisses. L'aire cherchée va donc se calculer comme différence de deux aires : $\mathscr{A} = \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ étant l'aire entre la courbe représentative de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = x$ et l'axe des abscisses et $\mathscr{A}$ l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f_2 avec $f_2(x) = x^2$.

Une primitive de f_1 est F_1 avec $F_1(x) = \dfrac{x^2}{2}$; une primitive de f_2 est F_2 avec $F_2(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

$\mathscr{A}_1 = F_1(1) - F_1(0) = \dfrac{1}{2}$

$\mathscr{A}_2 = F_2(1) - F_2(0) = \dfrac{1}{3}$

Une intégrale permet de calculer l'aire comprise entre une courbe et l'axe des abscisses. L'aire cherchée va donc se calculer comme différence de deux aires : $\mathscr{A} = \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ étant l'aire entre la courbe représentative de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = x$ et l'axe des abscisses et $\mathscr{A}$ l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f_2 avec $f_2(x) = x^2$.

Une primitive de f_1 est F_1 avec $F_1(x) = \dfrac{x^2}{2}$; une primitive de f_2 est F_2 avec $F_2(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

$\mathscr{A}_1 = F_1(1) - F_1(0) = \dfrac{1}{2}$

$\mathscr{A}_2 = F_2(1) - F_2(0) = \dfrac{1}{3}$

Donc : $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{6} - \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{6}$