

# Exercices sur l'intégration

## I Calcul d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

a)  $I_1 = \int_0^\pi \cos(3x) dx$

b)  $I_2 = \int_{-1}^0 e^{-2x+1} dx$

c)  $I_3 = \int_0^1 \sqrt{e^x} dx$

d)  $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^3} dx$

## II Vrai ou Faux?

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

1. Soient  $I = \int_0^\pi e^x \sin^2 x dx$  et  $J = \int_0^\pi e^x \cos^2 x dx$ .

Alors  $I + J = e^\pi - 1$ .

2. Soit  $f$  une fonction continue positive sur  $[a; b]$ .

Alors  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

3. Si  $a < b$  et  $\int_a^b f(x) dx$ , alors  $f$  est positive sur  $[a; b]$ .

4.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$

## III

Sur l'intervalle  $[0; 1]$ , on définit la fonction  $f_n$  par  $f_n(x) = x^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f_0(x) = 1$ .

On définit  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in [0; 1]$ ,

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$$

2. En déduire le sens de variation de la suite  $(I_n)$ .

3. cette suite est-elle convergente?

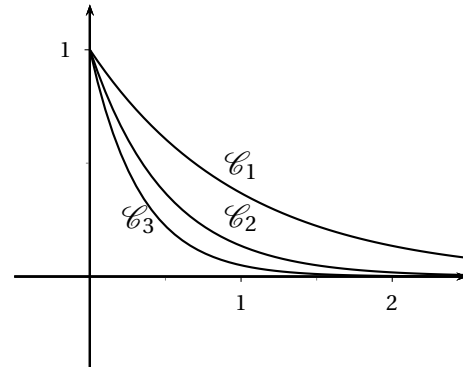
4. Vérifier en calculant explicitement  $I_n$ .

## IV Famille d'intégrales

On considère une famille de fonctions  $f_n, n \in \mathbb{N}^*$ , continues positives sur  $\mathbb{R}$  et leurs courbes représentatives  $\mathcal{C}_n$  dans un repère orthogonal du plan.

On a tracé les courbes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$

On définit  $I_n = \int_0^2 f_n(x) dx, n \in \mathbb{N}^*$



1. Émettre, à l'aide du graphique, une conjecture sur le sens de variation de la suite  $(I_n)$ .

2. On précise que  $f_n(x) = e^{-nx}$ .  
Calculer  $I_n$ .

## V

1. (a) Justifier que sur  $[0; 1]$ ,  $e^{-t^2} \geq e^{-t}$ .

(b) Comparer les intégrales  $\int_0^1 e^{-t} dt$  et

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt.$$

En déduire une minoration de  $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ .

2. Comparer de même  $\int_1^2 e^{-t} dt$  et  $\int_1^2 e^{-t^2} dt$ .

En déduire une inégalité portant sur  $\int_1^2 e^{-t^2} dt$ .