Forme exponentielle d’un nombre complexe

Notation

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre $\cos\theta + i\sin\theta$

Notation

Pour tout réel θ, on note $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ le nombre $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

En effet, en posant $f(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, on montre à partir des propriétés trigonométriques que :
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $\theta' \in \mathbb{R}$, $f(\theta)f(\theta') = f(\theta + \theta')$.
Or cette propriété est la relation fonctionnelle que nous avons trouvée pour la fonction exponentielle d'un réel.

Notation

Pour tout réel θ, on note $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ le nombre $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

En effet, en posant $f(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, on montre à partir des propriétés trigonométriques que :
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $\theta' \in \mathbb{R}$, $f(\theta)f(\theta') = f(\theta + \theta')$.
Or cette propriété est la relation fonctionnelle que nous avons trouvée pour la fonction exponentielle d'un réel.

La véritable justification vient d'une définition différente de la fonction exponentielle à l'aide d'une somme infinie de termes, valable dans $\mathbb{R}$ **et** dans $\mathbb{C}$, mais qu'on ne voit qu'après le bac !

Exemples

$$\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Exemples

$$\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}$$

Trouver la forme exponentielle d’un nombre complexe

On commence par trouver le module et un argument

Trouver la forme exponentielle d'un nombre complexe

On commence par trouver le module et un argument

Exemples

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Trouver la forme exponentielle d'un nombre complexe

On commence par trouver le module et un argument

Exemples

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

$5=5\left(\cos(0)+i\,\mathrm{i}\sin(0)\right)=5\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$ (qu'on n'utilise jamais !)

Trouver la forme exponentielle d'un nombre complexe

On commence par trouver le module et un argument

Exemples

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

$5=5\left(\cos(0)+i\mathrm{i}\sin(0)\right)=5\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$ (qu'on n'utilise jamais !)

$$-5\mathrm{i}=5\left(0+\mathrm{i}\times(-1)\right)=5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

Quelques expressions à connaître quasiment par cœur

1. $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$
2. $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$
3. La formule que certains considère comme la plus belle des mathématiques :
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$$
(car elle fait intervenir les nombres i (nombre imaginaire), e et π (nombres transcendants, c'est-à-dire solutions d'aucune équation algébrique) et qui donne avec ces trois nombres combinés, une expression simple

Retour sur un nombre vu en TD avec la forme trigonométique

On pose $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La forme trigonométrique de j est $\mathrm{j} = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$.

Da forme exponentielle est donc $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

Retour sur un nombre vu en TD avec la forme trigonométique

On pose $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La forme trigonométrique de j est $\mathrm{j} = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$.

Da forme exponentielle est donc $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

Formule du cours

Dans le cours, il y a la formule $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Retour sur un nombre vu en TD avec la forme trigonométique

On pose $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

La forme trigonométrique de j est $\mathrm{j} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

Da forme exponentielle est donc $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

Formule du cours

Dans le cours, il y a la formule $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit :

a) $\mathrm{j}^3 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}\times 3\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 1$

b) $\mathrm{j}^2 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right))^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{4\pi}{3}-2\pi\right)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \bar{\mathrm{j}}$

Exemples moins simples

1. $\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$
2. $-e^{i\theta} = e^{\mathrm{i}\pi}e^{i\theta} = e^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}$