Exemples sur la forme trigonométrique de nombres complexes

Trouver une forme algébrique

Soit $|z| = 2$ et $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{4}$; écrire z tout forme algébrique

Trouver une forme algébrique

Soit $|z| = 2$ et $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{4}$; écrire z tout forme algébrique

On sait que $z = |z|\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)$ si $\theta = \arg(z)$

Trouver une forme algébrique

Soit $|z| = 2$ et $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{4}$; écrire z tout forme algébrique

On sait que $z = |z|\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)$ si $\theta = \arg(z)$

On a donc

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)$$

Trouver une forme algébrique

Soit $|z| = 4$ et $\arg(z) = \pi$; écrire z tout forme algébrique

Trouver une forme algébrique

Soit $|z| = 4$ et $\arg(z) = \pi$; écrire z tout forme algébrique

On a : $z = 4(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = 4 \times (-1 + \mathrm{i} \times 0) = -4$

Trouver une forme algébrique

Soit $|z| = \sqrt{3}$ et $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$; écrire z tout forme algébrique

Trouver une forme algébrique

Soit $|z| = \sqrt{3}$ et $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$; écrire z tout forme algébrique

$$z = |z|\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)$$

Trouver une forme algébrique

Soit $|z| = \sqrt{3}$ et $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$; écrire z tout forme algébrique

$z = |z| \left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)$

On en déduit :

$$z = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants

Déterminer le module et un argument de $a = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants

Déterminer le module et un argument de $a = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right)$

Rappel : le forme trigonométrique de z est $z = r\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)$ avec $r = |z| > 0$

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants

Déterminer le module et un argument de $a = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

Rappel : le forme trigonométrique de z est $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z| > 0$

$2 > 0$ donc $a = r\cos\theta + i\sin\theta$ avec $r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{5}$.

$|a| = 2$ et $\arg(a) = \frac{\pi}{5}$.

$$b = -3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

$$b = -3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Rappel : $|\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \sqrt{1} = 1$
Conclusion : pour tout θ, $|\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta| = 1$

$$b = -3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Rappel : $|\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \sqrt{1} = 1$
Conclusion : pour tout θ, $|\cos\theta + i\sin\theta| = 1$

$$|b| = \left|-3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right| = |-3|\left|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = |-3| = 3$$

$$b = -3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Rappel : $|\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \sqrt{1} = 1$

Conclusion : pour tout θ, $|\cos\theta + i\sin\theta| = 1$

$$|b| = \left|-3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right| = |-3|\left|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = |-3| = 3$$

Determination d'un argument

Soit $\theta = arg(b)$.

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\mathrm{Re}(b)}{|b|} = \dfrac{-3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3} = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \\ \sin\theta = \dfrac{\mathrm{Im}(b)}{|b|} = \dfrac{-3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3} = -\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

On cherche donc θ tel que $\begin{cases} \cos\theta = -\cos\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\theta = -\sin\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

On cherche donc θ tel que $\begin{cases} \cos\theta = -\cos\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\theta = -\sin\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

On en déduit que $\theta = \dfrac{\pi}{3} + \pi + 2k\pi = \dfrac{4\pi}{3} = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

La mesure principale est $\theta = \dfrac{\pi}{3} - \pi = \dfrac{\pi - 3\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3}$

$\boxed{|b| = 3}$ et $\boxed{\arg(b) = -\dfrac{2\pi}{3}}$

Trouver le module et un argument de $c = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Trouver le module et un argument de $c = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

On trouve $|c| = 1$

Trouver le module et un argument de $c = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

On trouve $|c| = 1$

Recherche d'un argument θ

On doit avoir $c = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ donc $\begin{cases} \cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ \sin\theta = -\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{cases}$

Trouver le module et un argument de $c = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

On trouve $|c| = 1$

Recherche d'un argument θ

On doit avoir $c = \cos\theta + i\sin\theta$ donc $\begin{cases} \cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ \sin\theta = -\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{cases}$

θ et $\frac{3\pi}{4}$ doivent avoir le même cosinus mais des sinus opposés.

En raisonnant sur le cercle trigonométrique, on trouve $\theta = -\frac{3\pi}{4}$

En effet $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ et $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

Conclusion

$|d| = 1$ et $\arg(d) = -\dfrac{3\pi}{4}$