Intégration

Table des matières

I Notion d'intégrale pour une fonction positive

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(0;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$. Le réel noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$ délimité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ »

a et b sont les bornes (inférieure et supéieure) de l'intégrale et x est une variable « muette » ; elle n'intervient pas dans le résultat.

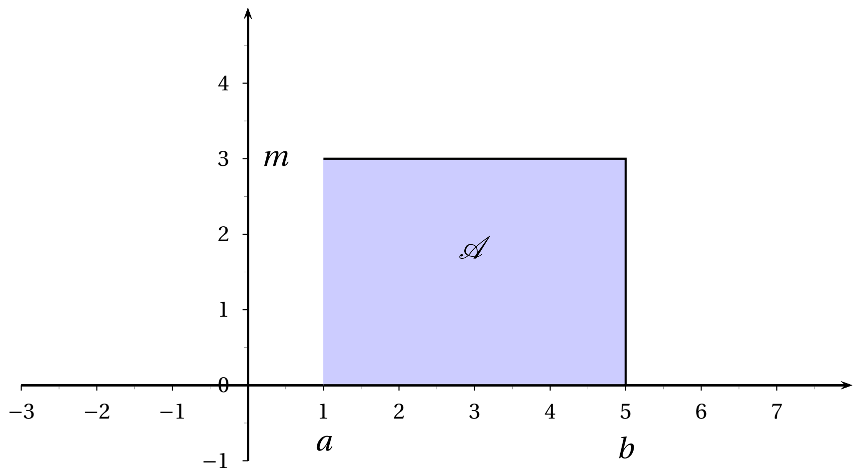
On utilise aussi souvent les lettres t et u.

Ainsi : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$

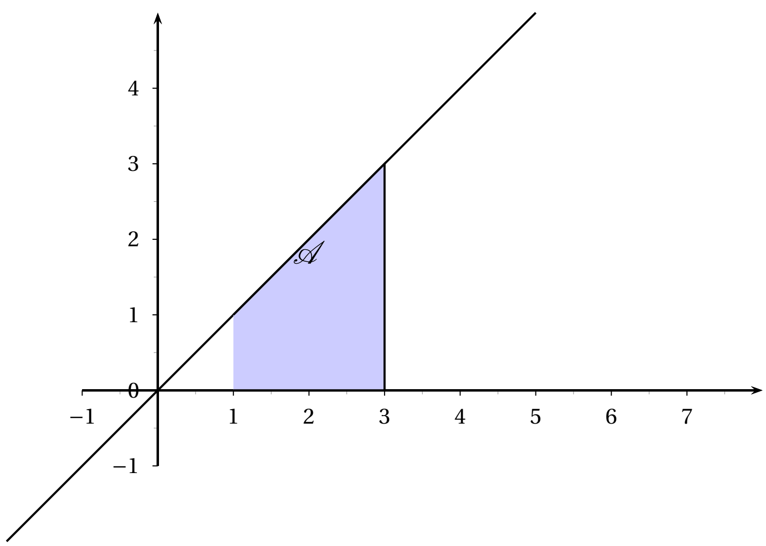
Remarque : le terme $\mathrm{d}x$ est important; le symbole $\int$ (S déformé) correspond à une somme **infinie** et l'on calcule une somme infinie **d'aires de rectangles** de hauteur $f(x)$ et de largeur infinitésimale $\mathrm{d}x$. $f(x)\,\mathrm{d}x$ est alors le produit de deux longueurs donc correspond à une aire.

Exemples :

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (car l'aire d'un segment est nulle)
- Fonction constante $f(x) = m$: $\displaystyle\int_a^b m\,\mathrm{d}x = m(b-a)$ (Le domaine $\mathscr{D}$ est un rectangle de longueur $b-a$ et de hauteur m)



- $\displaystyle\int_1^3 x\,\mathrm{d}x = 4$ (Le domaine $\mathscr{D}$ est un trapèze).



Rappel : l'aire d'un trapèze est $\dfrac{(b+B)h}{2}$ où b et B sont les bases (côtés parallèmes) et h est la hauteur.

II Intégrale d'une fonction de signe quelconque

1) Cas d'une fonction négative

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$. On définit l'intégrale de a à b de f par :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathscr{A}$$

, où $\mathscr{A}$ est l'aire (positive) du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Exemple :

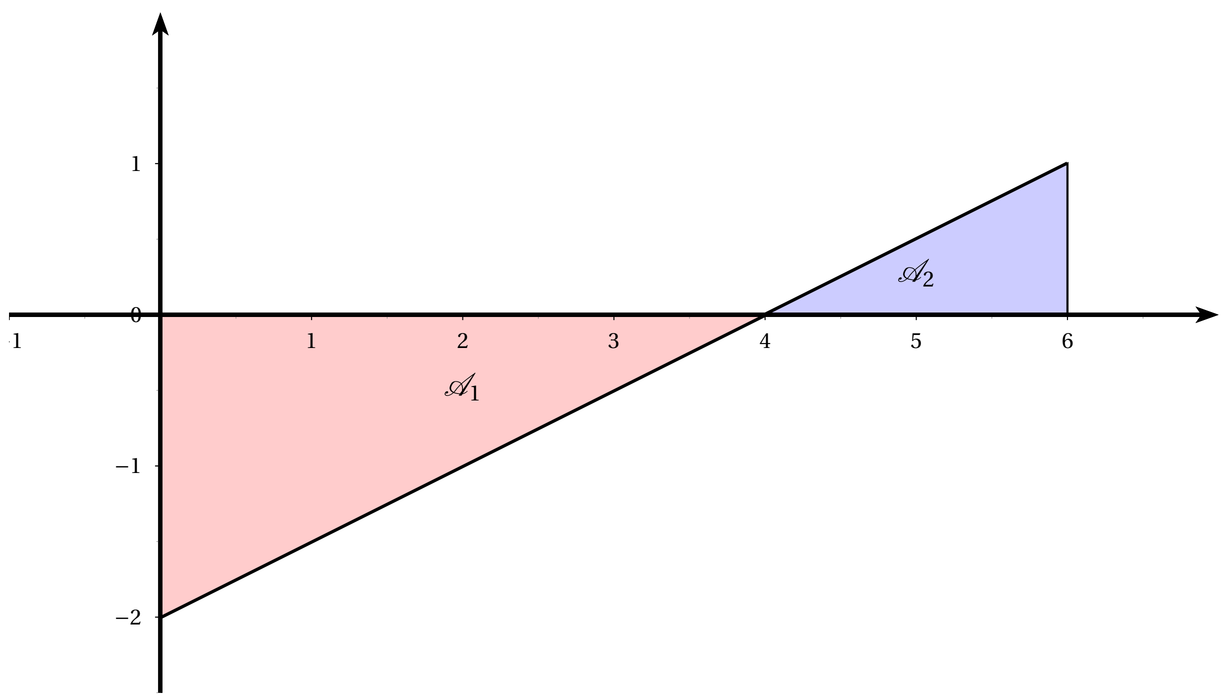
Soit f la fonction définie par : $f(x) : \dfrac{1}{2}x - 2$. Cette fonction est négative sur $[0; 3]$. L'aire de $\mathscr{D}$ est celle d'un trapèze, d'où le calcul : $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\left(2+\frac{1}{2}\right)\times 3}{2} = -\frac{15}{4}$.

2) Cas d'une fonction changeant de signe

Définition

Soit f une fonction continue qui change de signe (d'abord négative puis positive) sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.
Soit $\mathscr{A}_1$ l'aire de la partie délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, situé en dessus de l'axe des abscisses.
Soit $\mathscr{A}_2$ l'aire de la partie délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, situé au-desssus de l'axe des abscisses.
On pose alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1$.

Exemple : reprenons la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 2$.



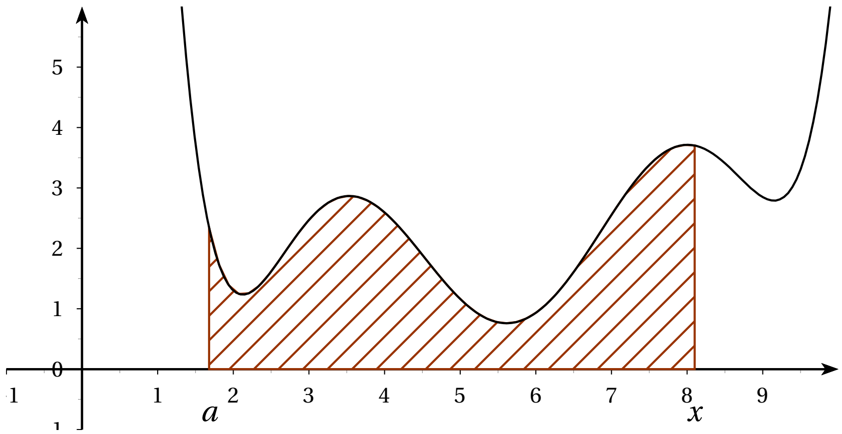
$$\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1 = 1 - 4 = -3$$

On peut évidemment généraliser au cas où l'on a plusieurs changements de signes, en comptant positivement les aires des domaines sur lesquels la fonction est positive et négativement les aires de ceux pour lesquels la fonction est négative.

Remarque : jusqu'à présent, nous avons pu calculer des intégrales directement, car les fonctions étudiées étaient simples et donnaient des aires faciles à calculer (rectangles, triangles, trapèzes) ; nous verrons plus loin comment calculer des intégrales de fonctions moins simples, comme $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ ou $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$.

III Fonction définie par une intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et soit x un nombre quelconque de cet intervalle.
On considère l'intégrale $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ qui correspond à l'aire hachurée sur le dessin ; elle dépend de x.



Ainsi définit-on une fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème (en partie admis)

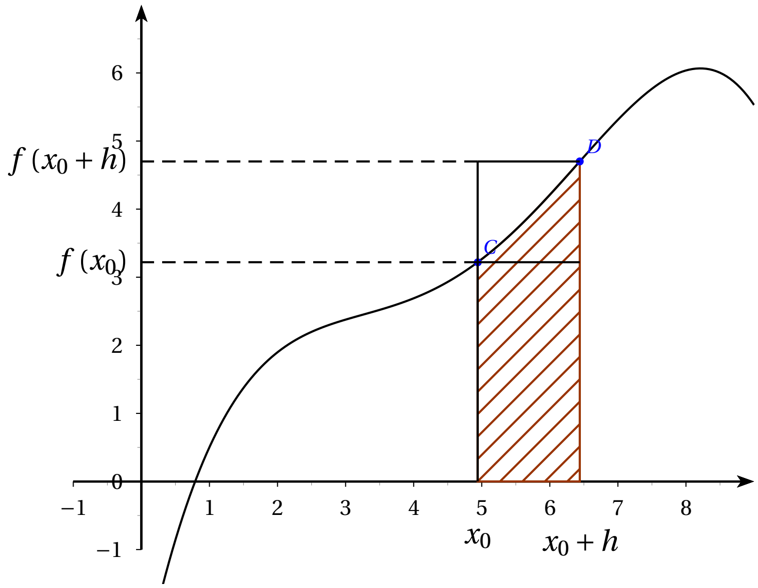
Si f est **continue** sur $[a\,;\,b]$, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\,;\,b]$ et sa dérivée est f ; on dit que F est une primitive de f.

Une primitive F de f est une fonction dérivable telle que $F' = f$.

Démonstration dans le cas très particulier d'une fonction continue, **positive et croissante** sur $[a\,;\,b]$. (la démonstration dans le cas général est admise)

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle $I = [a;b]$, de courbe $\mathscr{C}$.
On définit sur I la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ et on fixe x_0 dans I.

1. $F(a) = 0$
2. Soit h un réel strictement positif tel que $x_0 + h \in I$.



(a) $F(x_0+h)-F(x_0)$ représente l'aire sous la courbe entre x_0+h et x_0 (partie hachurée) puisque c'est la différence entre deux aires.

(b) Graphiquement, on trouve : $hf(x_0) \leqslant F(x_0+h)-F(x_0) \leqslant hf(x_0+h)$ (en encadrant l'aire hachurée par les aires de deux rectangles)

(c) On en déduit $f(x_0) \leqslant \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$.

Comme f est **continue**, $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ d'où : $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$ (par le théorème des gendarmes)

3. Si h est négatif, on trouve un résultat analogue. (Cette fois, $x_0+h \leqslant x_0$ mais la démarche est la même)
4. Par conséquent, la fonction F est **dérivable** en x_0 et sa fonction dérivée est f.

IV Primitive d'une fonction

1) Primitive de f sur un intervalle I

Définition

Soient F et f deux fonctions définies sur un intervalle I.
F est une primitive de f sur I si, et seulement si, la fonction F est dérivable sur I et a pour dérivée f.
$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Exemple :

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $f : x \mapsto$ sur $\mathbb{R}$, car pour tout x de $\mathbb{R}$, $F'(x) = x = f(x)$.

Remarque : $G : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + 5$ est aussi une primitive de f car $G' = f$.
Une primitive n'est pas unique, mais définie à une constante près.
En physique, on calcule la constante souvent à partir des conditions initiales.

Par lecture inverse du tableau des dérivées des fonctions usuelles, on obtient les résultats suivants :

Fonction	une primitive	validité
$f(x)=a\in\mathbb{R}$	$F(x)=ax$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n(n\in\mathbb{N}^*)$	$F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)$	$]0\ ;\ +\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$	$F(x)=-\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N},\ n>1$	$F(x)=-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x)=\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$F(x)=\mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$	$\mathbb{R}$
Hors-programme : $f(x)=1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=\tan x$	$\left](2k-1)\dfrac{\pi}{2};(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right[\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

2) Primitives et opérations :

Soient u et v deux fonctions admettant des primitives respectives U et V sur un intervalle I et g une fonction admettant une primitive G sur un intervalle J contenant l'intervalle $u(I)$.
On note u' la dérivée de u.

Fonction	une primitive	validité
$f=\alpha u+\beta v((\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2)$	$F=\alpha U+\beta V$	I
$f=u'\times g\circ u$	$F=G\circ u$	I
$f=u'u^n(n\in\mathbb{N}^*$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	I
$f=\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	u ne s'annule pas sur I
$f=\dfrac{u'}{u^n},\ n\in\mathbb{N},\ n>1$	$F=-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	u ne s'annule pas sur I
$f=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$F=\sqrt{u}$	$u>0$ sur I
$f=u'\mathrm{e}^u$	$F=\mathrm{e}^u$	
$f=u'\cos(u)$	$\sin(u)$	I
$f=u'\sin(u)$	$-\cos(u)$	I

3) Existence de primitives

Théorème admis

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors f admet des primitives sur I.
Pour $a\in\mathbb{R}$, $x\longmapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'anule en a. (Vient du paragraphe III)

4) Primitives d'une même fonction

Propriété

Si f est une fonction définie sur un intervalle I qui admet une primitive F sur I, alors :

- les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$
- pour tout couple $(x_0; y_0)$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une **unique** primitive F_0 de f qui prend la valeur y_0 en x_0.

Démonstration :

G est une primitive de f sur I signifie que G est dérivable sur I et que $G' = f$. Alors $G' = F' = f$, donc $(G - F)' = 0$.
Par conséquent, $G - F$ est constante sur I. Il existe un réel k tel que $G - F = k$ donc $G = F + k$.
$G(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0) + k = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - F(x_0)$.

5) Exemples de calculs de primitives :

- $f(x) = 3x^5 + 2x - 5$; une primitive est donnée par : $F(x) = 3 \times \dfrac{x^6}{6} + 2 \times \dfrac{x^2}{2} - 5x = \boxed{\dfrac{x^6}{2} + x^2 - 5x}$
- $f(x) = (2x+1)\left(x^2 + x + 3\right)^7$. On cherche à faire apparaître $u'u^n$ avec $n = 7$.
  On pose $u(x) = x^2 + x + 3$; alors $u'(x) = 2x + 1$. On a donc $f = u'u^7 = u'u^n$ avec $n = 7$ donc une primitive est $F = \dfrac{u^8}{8}$.
  Par conséquent : $\boxed{F(x) = \dfrac{1}{8}(x^2 + x + 3)^8}$.

V Intégrale et primitive

1) Fonction continue sur I

Théorème admis

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément quelconque de I. La fonction Φ définie sur I par : $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

1. Si h est négatif, on trouve un résultat analogue.
2. Par conséquent, la fonction $\mathscr{A}$ est dérivable en x_0 et sa fonction dérivée est f.

Remarque : Φ est dérivable et $\Phi' = f$.

Exemple : La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $]0; +\infty[$; son unique primitive qui s'annule en 1 étant la fonction logarithme népérien, on a, pour tout x de $]0; +\infty[$: $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

2) Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

, où F est une primitive quelconque de f sur I.

Démonstration :

Notons Φ la primitive de f sur I qui s'annule en a. On a : $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$. On sait qu'il existe k réel tel que : $F = \Phi + k$.

Alors : $F(b) - F(a) = \Phi(b) - k - (\Phi(a) - k) = \Phi(b) = \int_a^b f(t)dt$ (car $\Phi(a) = 0$).

On a ainsi un procédé de calcul d'une intégrale pour une fonction continue dont on connaît une primitive.

L'expression a un sens quels que soient le signe de la fonction f et l'ordre des bornes a et b.

Exemple : $\int_1^2 (x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}$

VI Propriétés de l'intégrale

1) Valeur moyenne

Définition

Soit f une fonction continue et strictement positive sur un intervalle $[a;b]$ $(a < b)$.

La **valeur moyenne** de f sur $[a;b]$ est le réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mu(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le réel μ tel que le rectangle de dimensions μ et $b-a$ soit de même aire que le domaine $\mathscr{D}$ dont on calcule l'aire. C'est la valeur que devrait prendre f si elle était constante sur $[a;b]$ pour que l'aire sous la courbe soit inchangée.

Exemple : Le profil d'un terrain est donné par ne courbe représentative d'une fonction positive. Si on déplace le terrain en remblayant les parties creuses et en en aplanissant les parties qui dépassent, quelle serait la hauteur du terrain plat obtenu ?

Cette hauteur moyenne correspondrait à la valeur moyenne de la fonction.

2) Relation de Chasles

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a, b et c trois nombres de I. Alors :

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt.$$

Démonstration : immédiate en utilisant une primitive.

Cas particulier : $\int_a^b f(t)dt + \int_b^a f(t)dt = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Interprétation graphique en termes d'aires :

3) Linéarité

Propriété de linéarité

Soient f et g deux fonctions continues définies sur un intervalle I et soit α un réel.
Pour tous a et b de I :
$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
$\int_a^b (\alpha f)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstration : clair en utilisant des primitives.

Par exemple : $\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = [(F+G)(x)]_a^B = (F(b)+G(b)) - (F(a)+G(a)) = [F(b)-F(a)] + (G(b)-G(a)) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

4) Positivité

Positivité

Soit f une fonction continue sur I et a et b deux réels ($a \leq b$).

Si f est positive sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Cette propriété est liée à la définition de l'intégrale, pour une fonction positive, comme aire située sous la courbe.

5) Signe d'une intégrale

Propriété

Si $f \geq 0$ sur I : avec $a \leq b$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$; si $a \geq b$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$

Si $f \leq 0$ sur I : avec $a \leq b$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$; si $a \geq b$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

Exemples :

Sans calculs, on a : $\int_{-2}^0 (1+\sin^2 x)\,\mathrm{d}x \geq 0$; $\int_2^0 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leq 0$

6) Conservation de l'ordre

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur I. Soient $a \leq b$.

Si $f \leq g$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration :

$g - f \geq 0$ sur $[a;b]$. $\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ d'oî le résultat par linéarité.

7) Inégalité de la moyenne

Propriété

Soit f une fonction continue sur I et deux réels a et b dans I.

- S'il existe deux réels m et M tels que $m \leq f \leq M$ sur I et si $a \leq b$, alors : $m(b-a) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$.
- S'il existe M tel que $|f| \leq M$ sur I, alors $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M|b-a|$.

Démonstration : on utilise la propriété précédente, en intégrant m, f et M entre a et b.