Géométrie dans l'espace (partie II)

I Vecteur normal à un plan, équation cartésienne d'un plan

Définition

Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à un plan $\mathscr{P}$ si $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à tout vecteur du plan.

Propriété

Soit $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point.

Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par A et ayant $\overrightarrow{n}$ comme vecteur normal est : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

Réciproquement : $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne d'un plan ayant pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(a; b; c)$.

Démonstration : $M(x; y; s) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$
il suffit de calculer le produit scalaire.

I.1 Plans sécants

Propriété

Pour montrer que deux plans sont sécants, donc non parallèles, il suffit de montrer que ces deux plans ont des vecteurs normaux non colinéaires.

II Droite

Définition

Une droite est l'intersection de deux plans.
Les coordonnées d'un point d'une droite vérifient les équations de deux plans et vérifient donc un système de deux équations.
Une droite peut donc être représentée par un système de deux équations cartésiennes de plans

III Représentation paramétrique d'une droite

Propriété

Soit une droite d passant par $A(x_A; y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Les coordonnées $(x; y; z)$ de tout point M de d sont de la forme :

$$\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}.$$

C'est ce qu'on appelle représentation paramétrique de d.

Réciproque : évidente

Démonstration : $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, d'où $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$. on en déduit le résultat en considérant les coordonnées.

IV Représentation paramétrique d'un plan

On suppose que l'espace est muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

Soit $\mathscr{P}$ un plan défini par un point $A\left(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A\right)$ et deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ non colinéaires.

Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point quelconque du plan $\mathscr{P}$.
Il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v}$.
En terme de coordonnées :

$$\begin{cases} x - x_A = at + a't' \\ y - y_A = bt + b't' \\ z - z_A = ct + c't' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases}$$ qu'on appelle représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$.