

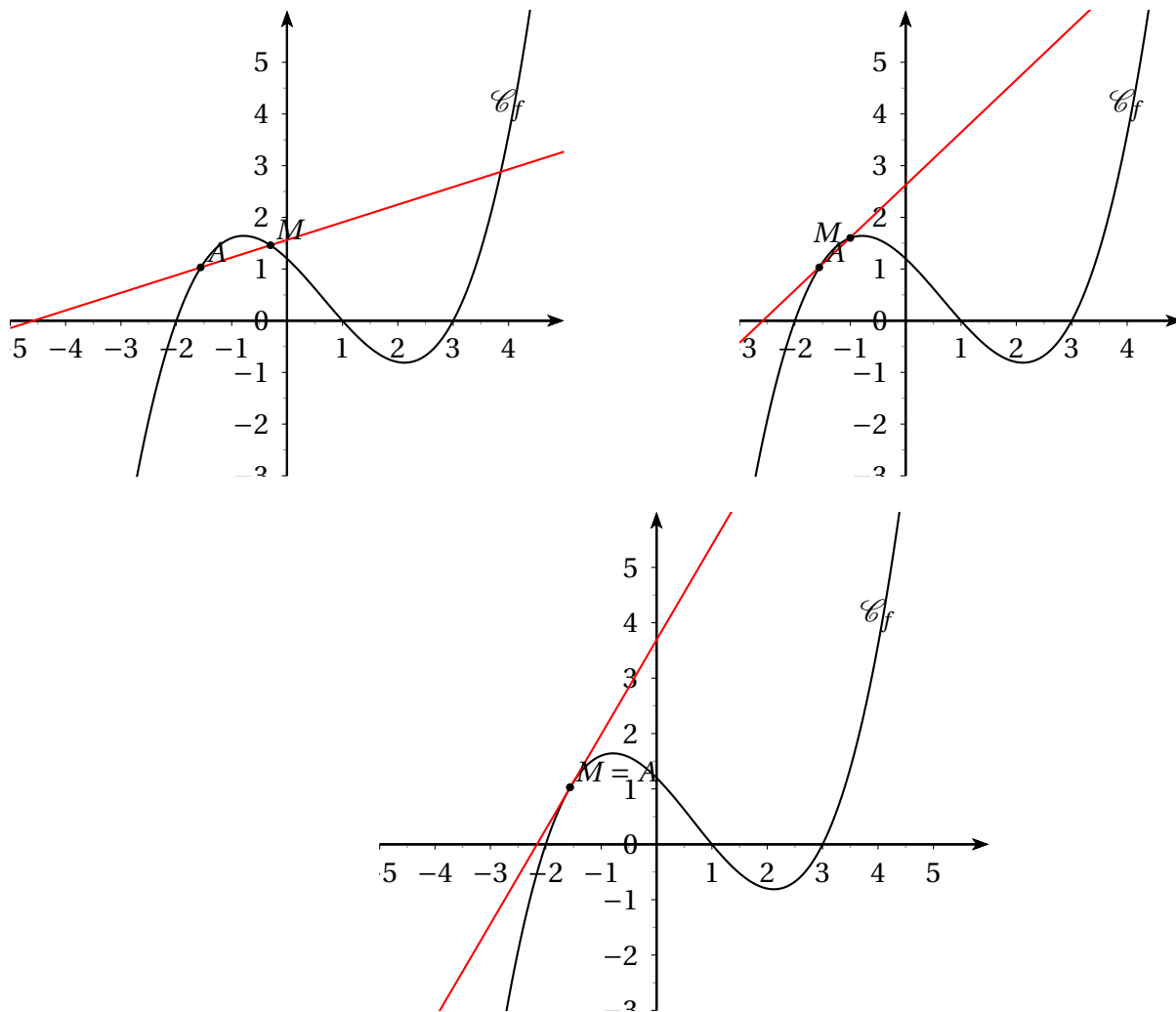
Fonctions numériques : dérivation

Table des matières

I	Notion de tangente à une courbe	2
II	Nombre dérivé de f en a et fonction dérivée :	2
III	Tableau des dérivées usuelles :	5
IV	Dérivées et opérations :	5
V	Dérivée de la composée de quelques fonctions :	5
V.1	Dérivée de $f \circ g$	5
V.2	Dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$	6
V.3	Dérivée de $x \mapsto u^n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$	6
V.4	Dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax + b)$	7
V.5	Dérivée de $\sin u$ et $\cos u$	7
VI	Application de la dérivabilité :	7
VI.1	Utilisation du nombre dérivé pour le calcul de certaines limites :	7
VI.2	Sens de variation d'une fonction :	7

I Notion de tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de courbe représentative \mathcal{C}_f et soit A un point fixe de \mathcal{C}_f . Soit M un point variable de \mathcal{C}_f . On trace la droite (AM) qui est sécante à \mathcal{C}_f . On fait tendre M vers A . Si, lorsque M tend vers A , la sécante admet une position limite, on dit que cette limite est tangente à \mathcal{C}_f .



II Nombre dérivé de f en a et fonction dérivée :



Définition

Notons a l'abscisse de A et x l'abscisse de M . Le coefficient directeur de la sécante (AM) est : $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Dire que la sécante a une position limite qui est la droite tangente à \mathcal{C}_f en A signifie que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.

Si ce nombre **existe** et s'il est **fini**, on pose : $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et ce nombre est le **nombre dérivé** de f en a .

On dit alors que f est dérivable en a .



Remarque :

En posant $x = a + h$, on obtient : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Exemple : $f(x) = x^2$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{[a+h]^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$.

Par conséquent : $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = 2a$.

f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$

Par définition, $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à \mathcal{C}_f en a .



Propriété

L'équation de la tangente est alors : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Démonstration :

Rappel : la droite, de coefficient directeur a et passant par le point M_0 de coordonnées $(x_0 ; y_0)$ a pour équation $y - y_0 = a(x - x_0)$.

En effet, l'équation est de la forme $y = ax + b$.

Comme M_0 appartient à cette droite, ses coordonnées vérifient cette équation, donc $y_0 = ax_0 + b$.

Par conséquent : $\begin{cases} y = ax + b \\ y_0 = ax_0 + b \end{cases}$.

Par soustraction, on obtient : $y - y_0 = a(x - x_0)$.

Pour la tangente, on obtient donc : $y - y_A = f'(a)(x - x_A)$ qui donne $y = f'(a)(x - x_A) + f(a)$.



Définition

f est dérivable sur un intervalle ouvert I si f est dérivable en tout a de I .



Remarque

La dérivée f' de f est elle-même une fonction. Si elle est dérivable, on appelle f'' sa dérivée (dérivée seconde de f).

Cette dérivée seconde peut elle-même être dérivable et ainsi de suite. Les dérivées d'ordre n , avec $n \geq 3$, se notent $f^{(n)}$.

Ainsi : $f'' = (f')'$; $f^{(3)} = (f'')'$ et plus généralement $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$

Exemples :

1. Soit $f(x) = 3x^4 + 5x^2 + 2x + 1$.

On a : $f'(x) = 12x^3 + 10x + 2$; $f''(x) = 36x^2 + 10$; $f^{(3)}(x) = 72x$; $f^{(4)}(x) = 72$; $f^{(5)}(x) = 0$ et les dérivées suivantes sont toutes égales à la fonction nulle.

2. Soit $f(x) = \sin x$.

Alors : $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f^{(3)}(x) = -\cos x$; $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$. On retombe sur la fonction initiale.

3. Imaginons qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} telle que, $f'(x) = f(x)$. f est-elle dérivable à l'ordre 3 si oui, que vaut $f^{(3)}$?

Réponse : $f' = f$ donc f' est dérivable et $f'' = (f')' = f'$ et de même $f^{(3)} = f$.

On pourrait alors montrer par récurrence, que la fonction f vérifie alors : pour tout n , $f^{(n)} = f$.

On étudiera cette fonction plus en détail dans un prochain chapitre.

Exercices

- Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.
- Étudier la dérivabilité de la fonction $x \mapsto x|x|$ en 0.

Solutions :

- Soit f la fonction $x \mapsto |x|$.

$$\forall x \neq 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x}.$$

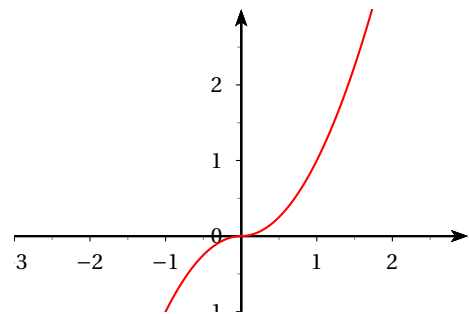
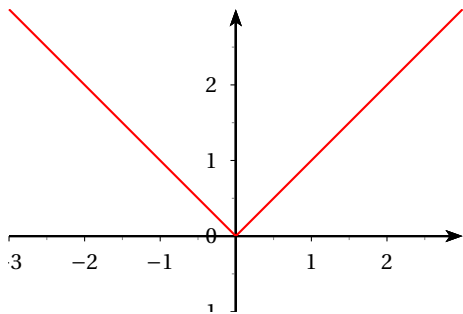
$$\text{Si } x < 0, \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1 \text{ et pour } x > 0, \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1.$$

$$\text{On en déduit que : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-1) = -1, \text{ alors que } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1) = 1.$$

La limite à gauche et à droite n'est pas la même, donc la limite en 0 n'existe pas; f n'est pas dérivable en 0 (mais l'est à gauche et à droite); on dit que la courbe admet une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite.

- Soit $g : x \mapsto x|x|$. Cette fois, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (|x|) = 0$; la limite existe, donc la fonction g est dérivable en 0 et la courbe représentative de g a une tangente en 0.

Voici les deux représentations graphiques de f et de g .



III Tableau des dérivées usuelles :

Fonction f définie par :	Fonction f' définie par :	Domaine de dérivabilité de validité
$f(x) = k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n} (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	\mathbb{R}^*
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	\mathbb{R}
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	\mathbb{R}

IV Dérivées et opérations :

Soient u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel.

- $(ku)' = ku'$
- $(u + v)' = u' + v'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}, u(x) \neq 0$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v(x) \neq 0$

Exemples :



Théorème (admis)

| Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en $a \in I$; alors, f est continue en a

Attention, la réciproque est fausse; une fonction peut être continue en a , mais pas dérivable; exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ en 0.

V Dérivée de la composée de quelques fonctions :

V.1 Dérivée de $f \circ g$



Théorème admis

| Soit g une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans J et f une fonction définie et dérivable sur J .

Alors $f \circ g$ est dérivable et $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$.

Pour tout $x \in I$, $(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$.

V.2 Dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$



Propriété

Soit u une fonction définie, positive et dérivable sur un intervalle I , de fonction dérivée u' .

La fonction f définie sur I par $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable en tout nombre x tel que $u(x) \neq 0$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

On applique la formule de dérivations d'une fonction composée avec $g = u$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

Exemple : $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 7}$ définie sur \mathbb{R} .

$f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2 + 5x + 7$ et $u'(x) = 6x + 5$.

Alors :

$$f'(x) = \frac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+7}}.$$

V.3 Dérivée de $x \mapsto u^n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$



Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Soit u' sa fonction dérivée. et soit n un entier relatif non nul.

La fonction u^n est dérivable et $(u^n)' = nu' \times u^{n-1}$.

On applique la formule de dérivation d'une fonction composée avec $g = u$ et $f(x) = x^n$.

Exemples :

1. Soit $f : x \mapsto (3x^2 + 5x - 7)^5$; $f = u^5$ avec $u(x) = (3x^2 + 5x - 7)$.

On a alors $f' = (u^5)' = 5u^4 u' = 5u^4 (6x + 5)$ avec $u'(x) = 6x + 5$.

Par conséquent :

$$f'(x) = 5(6x+5)(3x^2+5x-7)^4.$$

2. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{(x^2 + x + 1)^5}$ sur \mathbb{R} .

On a $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-5}$ donc $f = u^{-5}$ avec $\begin{cases} n = -5 \\ u(x) = x^2 + x + 1 \end{cases}$.

$$f' = nu' u^{n-1} = -5u' u^{-6} = -\frac{5u'}{u^6} \text{ avec } u'(x) = 2x + 1.$$

Par conséquent :

$$f'(x) = -\frac{5(2x+1)}{(x^2+x+1)^6}$$

V.4 Dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax + b)$



Propriété

Soient f une fonction définie sur \mathbb{R} et deux nombres a et b .

La fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur \mathbb{R} et a pour dérivée $g'x \mapsto a \times f'(ax + b)$.

Démonstration

On applique la formule de dérivation d'une fonction composée avec $g(x) = ax + b$.

Exemple : Soit $f : x \mapsto \cos(2x + 3)$; $f'(x) = 2 \cos'(2x + 3) = \boxed{-2 \sin(2x + 3)}$.

V.5 Dérivée de $\sin u$ et $\cos u$

Propriété admise : si u est dérivable, $\sin u$ est dérivable et $\cos u$ est dérivable.

- $(\sin u)' = u' \times \sin' u = u' \cos u$
- $(\cos u)' = u' \times \cos' u = -u' \sin u$

Exemple : soit $f(x) = \sin(x^2)$.

$f = \sin u$ avec $u(x) = x^2$.

$f' = u' \cos u$ avec $u'(x) = 2x$ donc $\boxed{f'(x) = 2x \cos(x^2)}$

VI Application de la dérivabilité :

VI.1 Utilisation du nombre dérivé pour le calcul de certaines limites :

On sait que si f est dérivable en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

Exemple : $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$.

VI.2 Sens de variation d'une fonction :



Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si $f' = 0$ sur I , alors f est constante sur I .

Si f' est strictement positive sur I sauf éventuellement pour un certain nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors f est croissante sur I .

Si f' est strictement négative sur I sauf éventuellement pour un certain nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors f est décroissante sur I .

Exemple :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3$ définie sur \mathbb{R} .

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ et $f'(x) = 0$ pour $x = 0$.

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Exemple :

1. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2 \cos x - 2 + x^2$.

2. En déduire la comparaison des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$.

Solution :

1. f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = -2 \sin x + 2x$. Pour étudier le signe de $f'(x)$, dérivons f' . $f''(x) = -2 \cos x + 2 = 2(1 - \cos x) \geq 0$. f' est croissante sur \mathbb{R} et comme $f'(0) = 0$, on en déduit le signe de f' .

On en déduit que f est décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. Le minimum $f(0)$ vaut 0, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.