

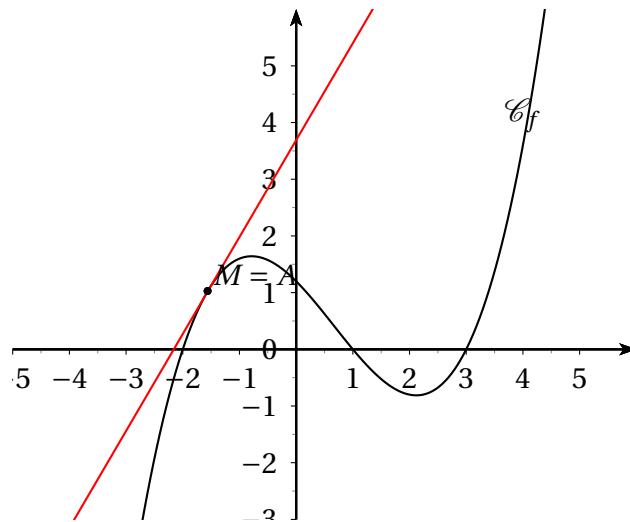
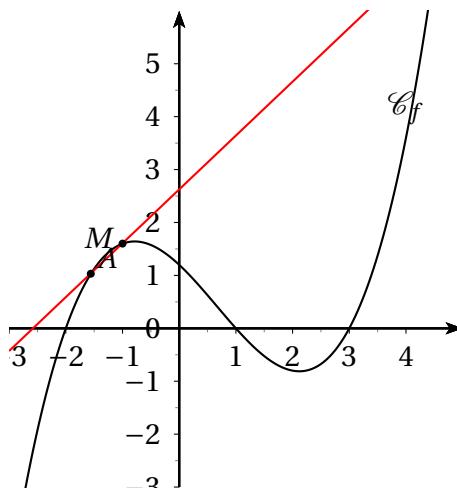
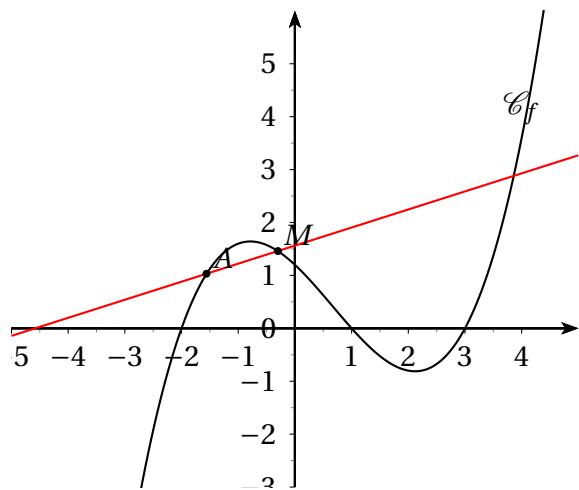
# Fonctions numériques : dérivation

## Table des matières

I	Notion de tangente à une courbe . . . . .	2
II	Nombre dérivé de $f$ en $a$ et fonction dérivée : . . . . .	2
III	Tableau des dérivées usuelles : . . . . .	5
IV	Dérivées et opérations : . . . . .	5
V	Dérivée de la composée de quelques fonctions : . . . . .	5
V.1	Dérivée de $f \circ g$ . . . . .	5
V.2	Dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ . . . . .	6
V.3	Dérivée de $x \mapsto u^n(x)$ , $n \in \mathbb{N}^*$ . . . . .	6
V.4	Dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax + b)$ . . . . .	7
V.5	Dérivée de $\sin u$ et $\cos u$ . . . . .	7
VI	Application de la dérivation : . . . . .	7
VI.1	Utilisation du nombre dérivé pour le calcul de certaines limites : . . . . .	7
VI.2	Sens de variation d'une fonction : . . . . .	7

## I Notion de tangente à une courbe

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  et soit  $A$  un point fixe de  $\mathcal{C}_f$ . Soit  $M$  un point variable de  $\mathcal{C}_f$ . On trace la droite  $(AM)$  qui est sécante à  $\mathcal{C}_f$ . On fait tendre  $M$  vers  $A$ . Si, lorsque  $M$  tend vers  $A$ , la sécante admet une position limite, on dit que cette limite est tangente à  $\mathcal{C}_f$ .



## II Nombre dérivé de $f$ en $a$ et fonction dérivée :



### Définition

Notons  $a$  l'abscisse de  $A$  et  $x$  l'abscisse de  $M$ . Le coefficient directeur de la sécante  $(AM)$  est :  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

Dire que la sécante a une position limite qui est la droite tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $A$  signifie que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe.

Si ce nombre **existe** et s'il est **fini**, on pose :  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  et ce nombre est le **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$ .

On dit alors que  $f$  est dérivable en  $a$ .



### Remarque :

En posant  $x = a + h$ , on obtient :  $\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\mathbf{h}}$ .

Exemple :  $f(x) = x^2$ .

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$  :  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{[a+h]^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$ .

Par conséquent :  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = 2a$ .

$f$  est dérivable en  $a$  et  $\boxed{\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = 2a}$

Par définition,  $f'(a)$  est le **coefficent directeur de la tangente** à  $\mathcal{C}_f$  en  $a$ .



### Propriété

|| L'équation de la tangente est alors :  $\mathbf{y} = \mathbf{f}'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{f}(\mathbf{a})$ .

### Démonstration :

Rappel : la droite, de coefficient directeur  $a$  et passant par le point  $M_0$  de coordonnées  $(x_0 ; y_0)$  a pour équation  $y - y_0 = a(x - x_0)$ .

En effet, l'équation est de la forme  $y = ax + b$ .

Comme  $M_0$  appartient à cette droite, ses coordonnées vérifient cette équation, donc  $y_0 = ax_0 + b$ .

Par conséquent :  $\begin{cases} y &= ax + b \\ y_0 &= ax_0 + b \end{cases}$ .

Par soustraction, on obtient :  $y - y_0 = a(x - x_0)$ .

Pour la tangente, on obtient donc :  $y - y_A = f'(a)(x - x_A)$  qui donne  $y = f'(a)(x - x_A) + f(a)$ .



### Définition

||  $f$  est dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  si  $f$  est dérivable en tout  $a$  de  $I$ .



### Remarque

La dérivée  $f'$  de  $f$  est elle-même une fonction. Si elle est dérivable, on appelle  $f''$  sa dérivée (dérivée seconde de  $f$ ).

Cette dérivée seconde peut elle-même être dérivable et ainsi de suite. Les dérivées d'ordre  $n$ , avec  $n \geq 3$ , se notent  $f^{(n)}$ .

Ainsi :  $f'' = (f')'$ ;  $f^{(3)} = (f'')'$  et plus généralement  $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$

### Exemples :

1. Soit  $f(x) = 3x^4 + 5x^2 + 2x + 1$ .

On a :  $f'(x) = 12x^3 + 10x + 2$ ;  $f''(x) = 36x^2 + 10$ ;  $f^{(3)}(x) = 72x$ ;  $f^{(4)}(x) = 72$ ;  $f^{(5)}(x) = 0$  et les dérivées suivantes sont toutes égales à la fonction nulle.

2. Soit  $f(x) = \sin x$ .

Alors :  $f'(x) = \cos x$ ;  $f''(x) = -\sin x$ ;  $f^{(3)}(x) = -\cos x$ ;  $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ . On retombe sur la fonction initiale.

3. Imaginons qu'il existe une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que,  $f'(x) = f(x)$ .  $f$  est-elle dérivable à l'ordre 3 si oui, que vaut  $f^{(3)}$ ?

Réponse :  $f' = f$  donc  $f'$  est dérivable et  $f'' = (f')' = f'$  et de même  $f^{(3)} = f$ .

On pourrait alors montrer par récurrence, que la fonction  $f$  vérifie alors : pour tout  $n$ ,  $f^{(n)} = f$ .

On étudiera cette fonction plus en détail dans un prochain chapitre.

### Exercices

- Montrer que la fonction  $x \mapsto |x|$  n'est pas dérivable en 0.
- Étudier la dérivabilité de la fonction  $x \mapsto x|x|$  en 0.

### Solutions :

- Soit  $f$  la fonction  $x \mapsto |x|$ .

$$\forall x \neq 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x}.$$

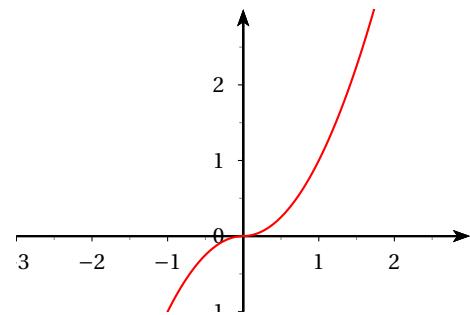
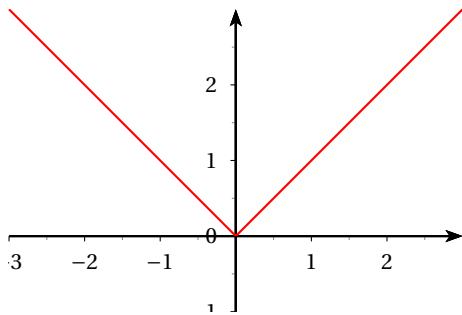
$$\text{Si } x < 0, \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1 \text{ et pour } x > 0, \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1.$$

On en déduit que :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1$ , alors que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} (1) = 1$ .

La limite à gauche et à droite n'est pas la même, donc la limite en 0 n'existe pas;  $f$  n'est pas dérivable en 0 (mais l'est à gauche et à droite); on dit que la courbe admet une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite.

- Soit  $g : x \mapsto x|x|$ . Cette fois, on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (|x|) = 0$ ; la limite existe, donc la fonction  $g$  est dérivable en 0 et la courbe représentative de  $g$  a une tangente en 0.

Voici les deux représentations graphiques de  $f$  et de  $g$ .



### III Tableau des dérivées usuelles :

Fonction $f$ définie par :	Fonction $f'$ définie par :	Domaine de décidabilité de validité
$f(x) = k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n} (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$

### IV Dérivées et opérations :

Soient  $u, v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  et  $k$  un réel.

- $(ku)' = ku'$
- $(u + v)' = u' + v'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}, u(x) \neq 0$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v(x) \neq 0$

#### Exemples :



#### Théorème (admis)

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et dérivable en  $a \in I$ ; alors,  $f$  est continue en  $a$

Attention, la réciproque est fausse; une fonction peut être continue en  $a$ , mais pas dérivable; exemple, la fonction  $x \mapsto |x|$  en 0.

### V Dérivée de la composée de quelques fonctions :

#### V.1 Dérivée de $f \circ g$



#### Théorème admis

Soit  $g$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $J$  et  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $J$ .

Alors  $f \circ g$  est dérivable et  $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$ .

Pour tout  $x \in I$ ,  $(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$ .

## V.2 Dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

### Propriété

Soit  $u$  une fonction définie, positive et dérivable sur un intervalle  $I$ , de fonction dérivée  $u'$ . La fonction  $f$  définie sur  $I$  par  $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$  est dérivable en tout nombre  $x$  tel que  $u(x) \neq 0$  et

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

On applique la formule de dérivations d'une fonction composée avec  $g = u$  et  $f : x \mapsto \sqrt{x}$ .

**Exemple :**  $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 7}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

$f(x) = \sqrt{u(x)}$  avec  $u(x) = 3x^2 + 5x + 7$  et  $u'(x) = 6x + 5$ .

Alors :  $f'(x) = \frac{6x + 5}{2\sqrt{3x^2 + 5x + 7}}$ .

## V.3 Dérivée de $x \mapsto u^n(x)$ , $n \in \mathbb{N}^*$

### Propriété

Soit  $u$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$ . Soit  $u'$  sa fonction dérivée. et soit  $n$  un entier relatif non nul.

La fonction  $u^n$  est dérivable et  $(u^n)' = nu' \times u^{n-1}$ .

On applique la formule de dérivation d'une fonction composée avec  $g = u$  et  $f(x) = x^n$ .

**Exemples :**

1. Soit  $f : x \mapsto (3x^2 + 5x - 7)^5$ ;  $f = u^5$  avec  $u(x) = (3x^2 + 5x - 7)^5$ .  
On a alors  $f' = (u^5)' = 5u' u^{5-1} = 5u' u^4$  avec  $u'(x) = 6x + 5$ .

Par conséquent :  $f'(x) = 5(6x + 5)(3x^2 + 5x - 7)^4$ .

2. Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{(x^2 + x + 1)^5}$  sur  $\mathbb{R}$ .

On a  $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-5}$  donc  $f = u^{-5}$  avec  $\begin{cases} n = -5 \\ u(x) = x^2 + x + 1 \end{cases}$ .

$f' = nu' u^{n-1} = -5u' u^{-6} = -\frac{5u'}{u^6}$  avec  $u'(x) = 2x + 1$ .

Par conséquent :  $f'(x) = -\frac{5(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^6}$

## V.4 Dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax + b)$

### Propriété

Soient  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et deux nombres  $a$  et  $b$ .

La fonction  $g : x \mapsto f(ax + b)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et a pour dérivée  $g' : x \mapsto a \times f'(ax + b)$ .

### Démonstration

On applique la formule de dérivation d'une fonction composée avec  $g(x) = ax + b$ .

**Exemple :** Soit  $f : x \mapsto \cos(2x + 3)$ ;  $f'(x) = 2 \cos'(2x + 3) = \boxed{-2 \sin(2x + 3)}$ .

## V.5 Dérivée de $\sin u$ et $\cos u$

Propriété admise : si  $u$  est dérivable,  $\sin u$  est dérivable et  $\cos u$  est dérivable.

- $(\sin u)' = u' \times \sin' u = u' \cos u$
- $(\cos u)' = u' \times \cos' u = -u' \sin u$

Exemple : soit  $f(x) = \sin(x^2)$ .

$f = \sin u$  avec  $u(x) = x^2$ .

$f' = u' \cos u$  avec  $u'(x) = 2x$  donc  $\boxed{f'(x) = 2x \cos(x^2)}$

## VI Application de la dérivabilité :

### VI.1 Utilisation du nombre dérivé pour le calcul de certaines limites :

On sait que si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ .

**Exemple :**  $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$ .

### VI.2 Sens de variation d'une fonction :



### Théorème (admis)

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Si  $f' = 0$  sur  $I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .

Si  $f'$  est strictement positive sur  $I$  sauf éventuellement pour un certain nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors  $f$  est croissante sur  $I$ .

Si  $f'$  est strictement négative sur  $I$  sauf éventuellement pour un certain nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors  $f$  est décroissante sur  $I$ .

**Exemple :**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = x^3$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$  et  $f'(x) = 0$  pour  $x = 0$ .

On en déduit que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Exemple :**

1. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2 \cos x - 2 + x^2$ .

2. En déduire la comparaison des fonctions  $x \mapsto \cos x$  et  $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$ .

**Solution :**

1.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = -2 \sin x + 2x$ . Pour étudier le signe de  $f'(x)$ , dérivons  $f'$ .  $f''(x) = -2 \cos x + 2 = 2(1 - \cos x) \geq 0$ .  $f'$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  et comme  $f'(0) = 0$ , on en déduit le signe de  $f'$ .

On en déduit que  $f$  est décroissante sur  $]-\infty ; 0[$  et croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

2. Le minimum  $f(0)$  vaut 0, donc :  $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ .