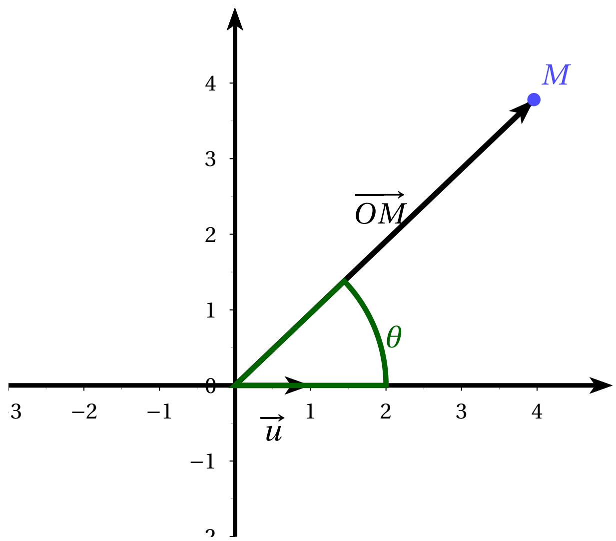
# Nombres complexes : forme trigonométrique

## I Coordonnées polaires d'un point

Soit $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ un repére orthonormal du plan complexe.
On considère un point $M$ autre que $O$. On va repérer le point M dans le plan autrement que par ses coordonnées cartésiennes (ou affixe).




On repère la position de $M$ par sa distance à 0 et l'angle orienté entre le vecteur $\vec{u}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

On note $[r\,;\,\theta]$ les coordonnés polaires d'un point ; $r = OM$ et $\theta = \left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM}\right)$ (angle orienté, défini à $2k\pi$ prés).

Les **coordonnées cartésiennes** de $M$ sont alors $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.

## II Argument d'un nombre complexe

**Définition :**

Dans le plan complexe muni du repére orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on appelle argument de $z \neq 0$, noté $\arg(z)$ **toute** mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ où $M$ est le point d'affixe $z$.

**Remarques :**

- Un nombre complexe a une infinité d'arguments, différents tous entre eux d'un multiple de $2\pi$.
  Autrement dit : $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ si $\theta$ est un des arguments.
  On utilise de préférence la mesure principale de cet argument, c'est-à-dire la mesure (parmi l'infinité de mesures possibles) qui appartient à l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi[$.
- 0 n'a pas d'argument car on ne pas pas définir d'angle entre $\vec{u}$ et le vecteur nul $\vec{0}$

## III Forme trigonométrique

Si $\theta = \arg(z)$, l'affixe de $z$ est alors : $z = r\cos\theta + \mathrm{i} r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

On a : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \left(\dfrac{\text{côté adjacent à l'angle}}{\text{hypoténuse}}\right) \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \left(\dfrac{\text{côté opposé à l'angle}}{\text{hypoténuse}}\right) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

**Définition :**

La forme trigonométrique de $z$ est : $\boxed{z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)}$ où $r = |z|$

**Remarque :** la forme trigonométrique d'un nombre complexe est unique.

Exemple de détermination de la forme trigonométrique d'un nombre complexe : soit $z = 2 + 2\mathrm{i}$.

- On commence par chercher le module : $|z| = |2+2\mathrm{i}| = |2(1+\mathrm{i})| = 2|1+\mathrm{i}| = 2\sqrt{1^2+1^2} = 2\sqrt{2}$ donc $|z| = 2\sqrt{2}$.
- Détermination de $\arg(z) = \theta$.
  On doit avoir :
  $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$.

  On cherche donc un angle $\theta$ tel que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$.

  On trouve $\boxed{\theta = \dfrac{\pi}{4}}$.

Par conséquent : $z \boxed{= 2 + 2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$

## IV Propriétés :

### a) Conjugué et opposé :

**Propriétés**

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ :

- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$

**Démonstration :** évident géométriquement, car les points d'affixes $z$ et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
Multiplier l'affixe $z \neq 0$ d'un point par (-1) revient à faire subir à ce point une symétrie de centre O ; l'argument

augmente alors de $\pi$ $[2\pi]$.

### b) Propriétés algébriques :

Si $z$ et $z'$ sont des nombres complexes non nuls, alors :

1. $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = 0\ [\pi]$ (caractérisation d'un réel)
2. $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ (caractérisation d'un imaginaire pur)
3. $\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall z' \in \mathbb{C}^*, \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
4. $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
5. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
6. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \arg\left(z^n\right) = n\arg(z)$

### Démonstration :

1. évident géométriquement : si $z \in \mathbb{R}^{+*}$, $\arg(z) = 0\ [2\pi]$ et si $z \in \mathbb{R}^{-*}$, $\arg(z) = \pi\ [2\pi]$ d'où le résultat.
   La réciproque est évidente.
2. facile (même méthode qu'au 1.)
3. Soient $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ écrits sous leurs formes trigonométriques.
   Alors : $zz' = rr'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = rr'(\cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\cos\theta') = rr'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')) = rr'(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'))$.
   Donc $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$.
4. Soit $z = r(cos\theta + i\sin\theta)$ avec $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta$.
   $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{\overline{z}}{r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)} = \dfrac{r(\cos\theta - i\sin\theta)}{r^2} = \dfrac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$ d'où $arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)$.
5. $\dfrac{z'}{z} = z' \times \dfrac{1}{z}$ et on utilise les propriétés précédentes.
6. **démonstration par récurrence** (facile à faire)

## V Forme exponentielle des nombres complexes

### Définition :

Pour tout nombre réel $\theta$, on pose : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.
Si $z$ est un nombre complexe non nul de module $r$ et d'argument $\theta$, on appelle forme exponentielle de $z$ l'écriture $z = re^{i\theta}$.

**Remarque :**

Soit $f$ la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par : $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$. On a : $f(\theta+\theta') = f(\theta)f(\theta')$. La fonction $f$ vérifie **l'équation fonctionnelle** caractéristique de la fonction exponentielle, ce qui est une première justification de cette écriture sous forme exponentielle.

La vraie justification vient de propriété que l'on étudie après le bac.

**Propriété :**

Soient $re^{i\theta}$ et $r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls, notés respectivement $z$ et $z'$.

1. $zz' = re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
2. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$
3. $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{r'e^{i\theta'}}{re^{i\theta}} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta'-\theta)}$
4. $z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$
5. $\overline{z} = \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$

La démonstration repose sur les calculs faits avec la notation trigonométrique.

**Remarque** : La formule qu'admirait Euler au point de la faire graver sur sa tombe est

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1}$$

**Remarques :**

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$