

## TS : TD suites n° 2

### I Vrai ou Faux?

- $(u_n)$  est une suite strictement positive, convergente de limite  $\ell$ . Alors  $\ell = 0$ .  
**FAUX** : contre-exemple :  $u_n = 2$  pour tout  $n$  (suite constante). La suite  $(u_n)$  est strictement positive et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ .
- Si pour tout  $n > 1$ ,  $-1 - \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1 + \frac{1}{n}$ , alors la suite  $(v_n)$  converge.  
**FAUX** : contre-exemple :  $u_n = (-1)^n$  pour tout  $n$ . La suite  $(u_n)$  n'a pas de limite et vérifie les inégalités imposées. On peut aussi prendre  $u_n = \cos n$  ou  $u_n = \sin n$  (mais ce n'est pas évident de démontrer que ces suites ne sont pas convergentes).
- Si  $(u_n)$  n'est pas minorée, alors elle est majorée.  
**FAUX** : contre-exemple :  $u_n = (-1)^n \times n$ ;  $(u_n)$  n'est ni majorée ni minorée.
- Si  $(u_n)$  prend un nombre fini de valeurs, alors elle est convergente.  
**FAUX** : contre-exemple :  $u_n = (-1)^n$ ; la suite prend deux valeurs mais diverge.
- Si  $(u_n)$  est strictement positive et strictement croissante, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .  
**FAUX** : contre-exemple :  $u_n = 2 - \frac{1}{n+1}$ ; cette suite est croissante et **converge** vers 2.

### II Antilles-Guyane septembre 2010

- D'après la définition  $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ .
  - Si la suite était géométrique, d'après les deux premiers termes la raison serait égale à  $-\frac{1}{2}$ ; or  $u_1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \neq u_2$ .
  - Si la suite était arithmétique, d'après les deux premiers termes la raison serait égale à  $\frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$ ; or  $u_1 + \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{2} = 2 \neq u_2$ .**Conclusion** : la suite  $(u_n)$  n'est ni arithmétique ni géométrique.
- (a)  $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (-1) = 1$ .  
 (b) Pour tout naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}$   
 $= u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$   
 $= \frac{1}{2} \left( u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \right) = \frac{1}{2}v_n$ .  
 (c) Pour tout  $n$ ,  $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ . On en déduit que la suite  $(v_n)$  est une **suite géométrique** de premier terme 1 et de raison  $q = \frac{1}{2}$ .  
 (d) Puisque la suite  $(v_n)$  est géométrique, quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$ .
- (a)  $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1$ .  
 (b) On a  $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n}$ .

(c) On a par définition  $\frac{u_n}{v_n} = w_n$ , donc l'égalité ci-dessus s'écrit :

$$w_{n+1} = 2 + w_n$$

(d) L'égalité précédente montre que la suite  $(w_n)$  est une suite **arithmétique** de premier terme  $-1$  et de raison 2.

$$\text{On a donc } w_n = w_0 + n \times 2 = -1 + 2n$$

4. On a trouvé que  $w_n = 2n - 1 = \frac{u_n}{v_n} = \frac{u_n}{\frac{1}{2^n}} = 2^n \times u_n$ .

Donc  $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$ , car  $2^n \neq 0$  quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ .

5. Démonstration par récurrence :

- Initialisation** :  $S_0 = u_0 = -1$  et  $2 - \frac{2 \times 0 + 3}{2^0} = 2 - \frac{3}{1} = 2 - 3 = -1$ . La formule est vraie au rang 0.

- Hérédité** : supposons qu'il existe un naturel  $k$  tel que :

$$S_k = \sum_{i=0}^k u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_k = 2 - \frac{2k+3}{2^k}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } S_{k+1} &= S_k + u_{k+1} = 2 - \frac{2k+3}{2^k} + \frac{2(k+1)-1}{2^{k+1}} \\ &= 2 + \frac{-4k-6+2k+1}{2^{k+1}} = 2 + \frac{-2k-5}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2k+5}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{2(k+1)+3}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

La formule est vraie au rang  $k+1$ .

On a donc démontré par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$