Correction des exercices sur les probabilités conditionnelles

I Extrait bac ES centres étrangers juin 2019

On s'intéresse à la clientèle d'un musée.

Chaque visiteur peut acheter son billet sur internet avant sa visite ou l'acheter aux caisses du musée à son arrivée.

Pour l'instant, la location d'un audioguide pour la visite n'est possible qu'aux caisses du musée. Le directeur s'interroge sur la pertinence de proposer la réservation des audioguides sur internet. Une étude est réalisée. Elle révèle que :

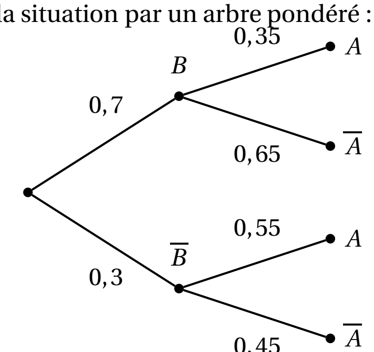
- 70 % des clients achètent leur billet sur internet ;
- parmi les clients achetant leur billet sur internet, 35 % choisissent à leur arrivée au musée une visite avec un audioguide ;
- parmi les clients achetant leur billet aux caisses du musée, 55 % choisissent une visite avec un audioguide.

On choisit au hasard un client du musée. On considère les évènements suivants :

- A : « Le client choisit une visite avec un audioguide » ;
- B : « Le client achète son billet sur internet avant sa visite ».

1. Traduction de l'énoncé : $p(B) = 0,7$; $p_B(A) = 0,35$; $p_{\overline{B}}(A) = 0,55$.

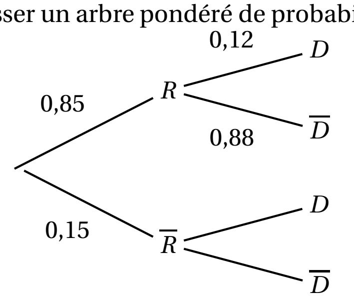
   On traduit la situation par un arbre pondéré :



2. D'après la formule des probabilités totales, on a :
   $p(A) = p_B(A) \times p(B) + p_{\overline{B}}(A) \times p\left(\overline{B}\right) = 0,35 \times 0,7 + 0,55 \times 0,3 = 0,245 + 0,165 = 0,41$.
   $\boxed{p(A) = 0,41}$.
3. On s'intéresse aux clients qui visitent le musée avec un audioguide.
   Si plus de la moitié d'entre eux ont acheté leur billet sur Internet alors le directeur proposera à l'avenir la location de l'audioguide sur le site Internet du musée.
   $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0,245}{0,41} \approx \boxed{0,598 > 0,5}$.
   Puisque plus de la moitié d'entre eux ont acheté leur billet sur Internet, le directeur proposera à l'avenir la location de l'audioguide sur le site Internet du musée.

II Bac S Polynésie septembre 2002

1. On peut dresser un arbre pondéré de probabilités :



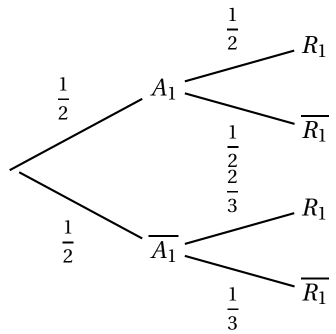
   On a donc
   - On a $p(R) = 0,85$;
   - On a $p(D) = 0,2$;
   - On a $p_R(D) = 0,12$.
2. (a) On a $p(R \cap D) = p(R) \times p_R(D) = 0,85 \times 0,12 = 0,102$.
   (b) $p\left(R \cap \overline{D}\right) = (R) \times p_R\left(\overline{D}\right) = 0,85 \times (1 - 0,12) = 0,85 \times 0,88 = 0,748$.
   (c) D'après la loi des probabilités totales :
   $p(D) = p(R \cap D) + p\left(\overline{R} \cap D\right) \iff 0,2 = 0,102 + p\left(\overline{R} \cap D\right) \iff p\left(\overline{R} \cap D\right) = 0,2 - 0,102 = 0,098$.
   (d) Les évènements $D \cap R$, $D \cap \overline{R}$, $R \cap \overline{D}$, et $\overline{R} \cap \overline{D}$ constituent une partition de l'ensemble des dossiers, d'où :
   $p\left(\overline{R} \cap \overline{D}\right) = 1 - p(D \cap R) - p\left(D \cap \overline{R}\right) - p\left(R \cap \overline{D}\right) = 1 - (0,102 + 0,098 + 0,748) = 0,052$.
   (e) $p_D(R) = \dfrac{p(R \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0,102}{0,2} = 0,51$.
3. Soit E l'évènement : « le dossier correspond à un excès de vitesse ».
   On a $p(E) = 0,6$ et $p_E(D) = 0,4$.
   (a) On a $p(E \cap D) = p(E) \times p_E(D) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$.
   (b) Le nombre de dossiers est assez grand pour que l'on puisse considérer que la probabilité de tirer un dossier correspondant à un excès de vitesse et entraînant des frais de dommages corporels est toujours égale à 0,24. La variable aléatoire égale au nombre de dossiers correspondant à un excès de vitesse et entraînant des frais de dommages corporels suit donc une loi de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = 0,24$.
   La probabilité qu'il n'y ait aucun dossier correspondant à un excès de vitesse et entraînant des frais de dommages corporels est égale à $(1 - 0,24)^5 = 0,76^5$, donc la probabilité qu'au moins un dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels est :
   $1 - 0,76^5 \approx 0,746$.

III Bac S Antilles Guyane septembre 2002

1. (a) On a pour $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{6}u_n + \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{6}u_n + \dfrac{5-6}{3 \times 5} = \dfrac{1}{6}u_n + \dfrac{-1}{15} = \dfrac{1}{6}\left(u_n - \dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{1}{6}v_n$.
   L'égalité $v_{n+1} = \dfrac{1}{6}v_n$ vraie pour $n \geqslant 1$, montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$. Son premier terme est
   $v_1 = u_1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{5-4}{10} = \dfrac{1}{10}$.
   (b) On sait que $v_n = v_1 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{6^{n-1}}$.
   Or $v_n = u_n - \dfrac{2}{5} \iff u_n = v_n + \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{6^{n-1}} + \dfrac{2}{5}$, pour $n \geqslant 1$.

2. (a) On a $a_1 = \dfrac{1}{2}$ puisque l'on choisit au départ l'un des deux dés au hasard

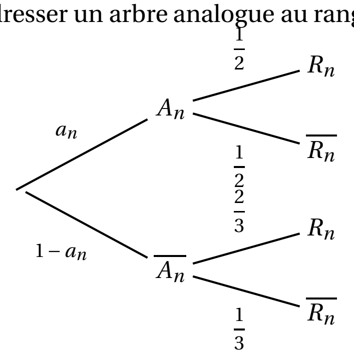
(b)



On a donc, d'après la loi des probabilités totales :

$r_1 = p(R_1) = p(A_1 \cap R_1) + p\left(\overline{A_1} \cap R_1\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3+4}{3 \times 4} = \dfrac{7}{12}$.

(c) On peut dresser un arbre analogue au rang n :



On a donc $r_n = p(R_n) = p(A_n \cap R_n) + p\left(\overline{A_n} \cap R_n\right) = a_n \times \dfrac{1}{2} + (1 - a_n) \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2} a_n - \dfrac{2}{3} a_n + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{6} a_n + \dfrac{2}{3}$.

(d) À la partie $(n+1)$, on utilise le dé A si :

- on l'a utilisé à la partie n et qu'on a obtenu rouge
- ou si on a utilisé le dé B à la partie n et que l'on a obtenu blanc.

On a donc pour tout $n \geqslant 1$,

$A_{n+1} = (A_n \cap R_n) + \left(\overline{A_n} \cap \overline{R_n}\right)$

(e) D'après la question précédente :

$a_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(A_n \cap R_n) + p\left(\overline{A_n} + \overline{R_n}\right)$, soit :

$a_{n+1} = p(A_n) \times p_{A_n}(R_n) + p_{\overline{A_n}}\left(\overline{R_n}\right) = \dfrac{1}{2} a_n + \dfrac{1}{3}(1 - a_n)$.

Finalement $a_{n+1} = \dfrac{1}{6} a_n + \dfrac{1}{3}$.

On a donc $a_n = u_n$ vue à la question 1. Donc

$$a_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}.$$

(f) D'après le résultat des questions 2. c. et 2. e., on a donc pour $n \geqslant 1$:

$r_n = -\dfrac{1}{6} a_n + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{5}\right) + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{60}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1} - \dfrac{1}{15} + \dfrac{2}{3} =$

$-\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n} + \dfrac{-1+10}{15} = -\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n} + \dfrac{9}{15} = -\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n} + \dfrac{3}{5}$.

Comme $-1 < \dfrac{1}{6} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{6}\right)^n = 0$, donc finalement

$\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \dfrac{3}{5} = 0,6 = 60\,\%$.