

# Correction de la feuille d'exercices de révision (récurrence, limites)

## I

Démontrons, par récurrence, que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $n! \geq 2^{n-1}$ .

- **Initialisation** : Pour  $n = 1$ ,  $2^{n-1} = 2^0 = 1 = 1!$  donc la propriété est vraie au rang  $n = 1$ .
- **Hérédité** : on suppose la propriété vraie à un rang  $n \geq 1$  quelconque.  
Au rang  $n + 1$  :  $(n + 1)! = n! \times (n + 1)$ .  
 $n \geq 1 \Rightarrow n + 1 \geq 2 \Rightarrow n! \times (n + 1) \times n! \times 2$ .  
Or, d'après l'hypothèse de récurrence,  $n! \geq 2^{n-1}$ , donc  $n! \times 2 \geq 2^{n-1} \times 2 = 2^{n+1} = 2^n$  d'où  $(n + 1)! \times 2^n$  c.q.f.d.

La propriété est héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n \geq 1$ , donc  $n! \geq 2^n$  pour tout  $n \geq 1$ .

## II

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3$  et

$u_{n+1} = 3u_n + 2$  pour tout  $n$ .

Montrons par récurrence que, pour tout  $n$ ,  $u_n = 4 \times 3^n - 1$ .

- **Initialisation** : Pour  $n = 0$ ;  $4 \times 3^n - 1 = 4 \times 3^0 - 1 = 4 \times 1 - 1 = 4 - 1 = 3 = u_0$  donc la propriété est vraie pour  $n = 0$ .
- **Hérédité** : on suppose la propriété vraie à un rang  $n$  quelconque donc  $u_n = 4 \times 3^n - 1$ .  
Alors :  $u_{n+1} = 3u_n + 2 = 3(4 \times 3^n - 1) + 2 = 3 \times 4 \times 3^n - 3 + 2 = 4 \times 3 \times 3^n - 1 = 4 \times 3^{n+1} - 1$  c.q.f.d.

La propriété est héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n \geq 1$ , donc  $u_n = 4 \times 3^n - 1$  pour tout  $n$ .



### Définition

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions; pour  $x \in \mathcal{D}_f$ , on suppose que  $f(x) \in \mathcal{D}_g$ .

On appelle composée de  $f$  suivie de  $g$  la fonction, notée  $g \circ f$ , définie par  $g \circ f(x) = g(f(x))$ .

$g \circ f : x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$ .



### Propriété

La composée de deux fonctions croissantes ou décroissantes est croissante; la composée d'une fonction croissante avec une fonction décroissante est décroissante.

**Justification** : supposons  $f$  et  $g$  croissantes : elles conservent donc toutes les deux l'ordre

Soient  $x_1 < x_2$  quelconques.

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$  donc  $g \circ f$  est croissante.

Si les deux fonctions sont décroissantes, elle changent toutes les deux l'ordre.

Alors :  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$  donc  $g \circ f$  est croissante.

Même démarche si l'une est croissante et l'autre décroissante

### III

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  dont on donne le tableau de variation :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$2$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$	$1$	$+\infty$

Dresser, en justifiant, les tableaux de variation des fonctions  $-f$ ,  $|f|$ ,  $f^2$  et  $\frac{1}{f}$ .

- $-f = u \circ f$  avec  $v(x) = -x$ ;  $v$  est décroissante, donc  $v \circ f$  a les variations contraires de celles de  $f$ .

Le tableau de variations de  $-f$  est donc :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$2$	$+\infty$
$-f(x)$	$+\infty$	$-2$	$+\infty$	$-1$	$-\infty$

- $|f| = u \circ f$  avec  $u(x) = |x|$ ; la fonction  $x \mapsto |x|$  est décroissante sur  $] -\infty ; 0]$  et croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

— Sur  $] -\infty ; -1]$ ,  $f$  est croissante et négative donc  $u \circ f$  est décroissante.

— Sur  $[-1 ; 0[$ ,  $f$  est décroissante et négative donc  $u \circ f$  est croissante.

— Sur  $]0 ; 2[$ ,  $f$  est décroissante et positive donc  $u \circ f$  est décroissante.

— Sur  $[2 ; +\infty[$ ,  $f$  est croissante et positive donc  $u \circ f$  est croissante.

On en déduit le tableau de variation :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$2$	$+\infty$
$ f(x) $	$+\infty$	$2$	$+\infty$	$1$	$+\infty$

- $f^2 = u \circ f$  avec  $u(x) = x^2$ ; la fonction carré  $x \mapsto x^2$  est décroissante sur  $] -\infty ; 0]$  et croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

— Sur  $] -\infty ; -1]$ ,  $f$  est croissante et négative, donc  $u \circ f$  est décroissante.

— Sur  $[-1 ; 0[$ ,  $f$  est décroissante et négative, donc  $u \circ f$  est croissante.

— Sur  $]0 ; 2[$ ,  $f$  est décroissante et positive, donc  $u \circ f$  est décroissante.

— Sur  $[2 ; +\infty[$ ,  $f$  est croissante et positive, donc  $u \circ f$  est croissante.

Le tableau de variation de  $f^2$  est donc :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$2$	$+\infty$
$f^2(x)$	$+\infty$	$4$	$+\infty$	$1$	$+\infty$

- $\frac{1}{f} = u \circ f$  avec  $u(x) = \frac{1}{x}$ ;  $u$  est décroissante sur  $] -\infty ; 0[$  et sur  $]0 ; +\infty[$ .

— Sur  $] -\infty ; -1]$ ,  $f$  est croissante et négative, donc  $u \circ f$  est décroissante comme composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

— Sur  $[-1 ; 0[$ ,  $u \circ f$  est décroissante d même que  $u$  donc  $u \circ f$  est croissante.

- Sur  $]0 ; 2]$ ,  $f$  est décroissante positive,  $u$  est décroissante donc  $u \circ f$  est croissante.
- Sur  $[2 ; +\infty[$ ,  $f$  est croissante positive,  $u$  est décroissante donc  $u \circ f$  est décroissante.

On en déduit de tableau de variation de  $\frac{1}{f}$  :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$2$	$+\infty$
$\frac{1}{f}(x)$	0		0	1	0
			$-\frac{1}{2}$		

#### IV

Déterminer la limite en  $+\infty$  dans chacun des cas suivants :

a)  $f(x) = (2 - \sin x)x^2$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 - \sin x \leq 3 \text{ (en ajoutant 2).}$$

En multipliant par  $x^2 \geq 0$ , on en déduit :

$$x^2 \leq (2 - \sin x)x^2 \leq 3x^2 \text{ donc } x^2 \leq f(x) \leq 3x^2 \text{ Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty.$$

D'après le **théorème de comparaison**,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

(On a minoré  $f(x)$  par une expression qui tend vers  $+\infty$ ).

b)  $f(x) = \frac{3x}{\cos x - 3}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -4 \leq \cos x - 3 \leq -2.$$

On applique alors la fonction inverse, qui est décroissante sur  $]-\infty ; 0[$ .

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\cos x - 3} \leq -\frac{1}{4}.$$

Comme on cherche la limite en  $+\infty$ , on peut supposer  $x$  positif et multiplier alors par  $3x$ , ce qui ne va pas changer le sens des inégalités.

$$\text{Donc : } -\frac{3x}{2} \leq \frac{3x}{\cos x - 3} \leq -\frac{3x}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{3x}{4} \right) = -\infty.$$

D'après le **théorème de comparaison**,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

On a cette fois majoré  $f(x)$  par un terme qui tend vers  $-\infty$ .

#### V

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-3 ; 3\}$  par :  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$ .

1. Déterminons, si elle existe,  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ .

On constate que le numérateur,  $x^2 - 4x + 3$ , s'annule pour  $x = 3$ .

C'est un polynôme du second degré, qui a comme racine 3. Il se factorise donc sous la forme  $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(ax + b)$ .

$a$  correspond au coefficient de  $x^2$  donc  $a = 1$ ;  $-3b = 3$  donc  $b = -1$  d'où  $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$ .

On peut aussi calculer le discriminant  $\Delta = 4$  et calculer les deux racines, qui valent 1 et 3.

$$\text{Pour } x \neq 3, \text{ on a } f(x) = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)} \text{ (identité remarquable au dénominateur).}$$

$$= \frac{x - 1}{x + 3}$$

Par conséquent :  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2. Démontrer que la courbe représentative de  $f$ ,  $\mathcal{C}$ , admet des asymptotes dont on donnera les équations.

• **Limite à l'infini :**

Pour  $x \neq 0$ ,  $f(x) = \frac{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{9}{x^2}\right)} = \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}}$  donc  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ .

La droite d'équation  $y = 1$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  au voisinage de l'infini.

• **Limite en -3 :**

$\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - 4x + 3) = 24 > 0$

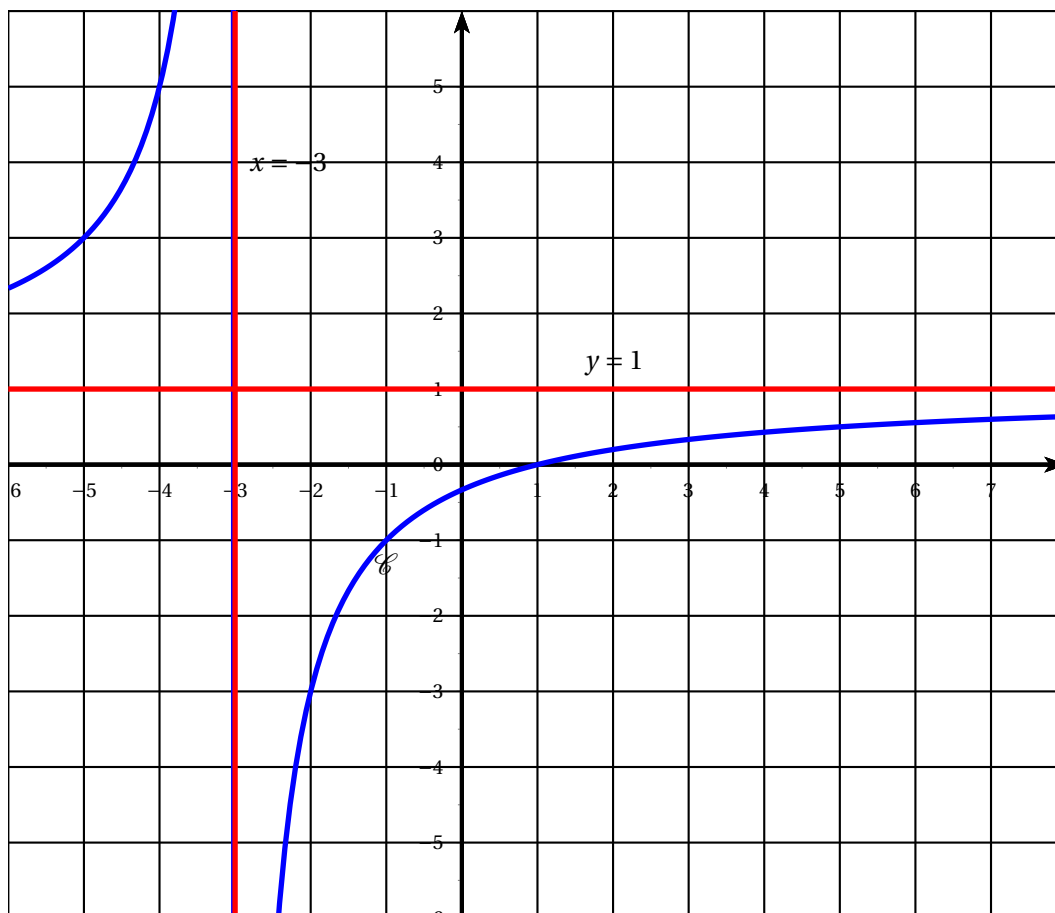
$\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - 9) = 0$ ; il faut distinguer selon la position de  $x$  par rapport à -3.

$\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} (x^2 - 9) = 0$  avec  $x^2 - 9 > 0$  donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} f(x) = +\infty$ .

$\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} (x^2 - 9) = 0$  avec  $x^2 - 9 < 0$  donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} f(x) = -\infty$ .

La droite d'équation  $x = -3$  est donc asymptote à  $\mathcal{C}$ .

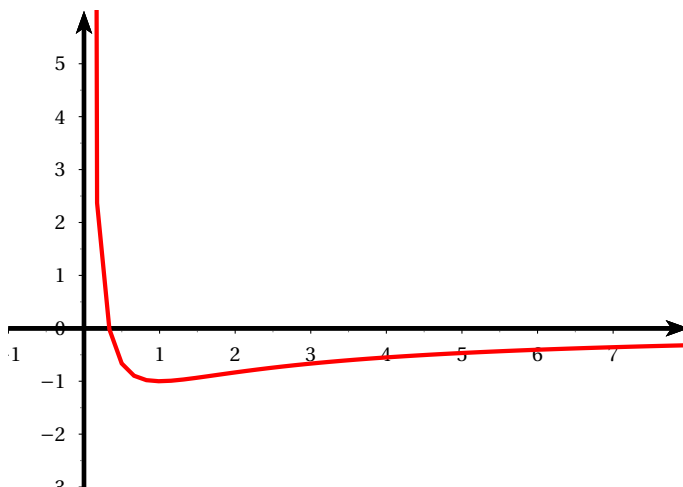
Courbe (non demandée)



## VI

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1-3x}{x^2+x}$ .

1. Traçons la courbe représentative de  $f$  à la calculatrice. Conjecturer la limite de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ , ainsi que ses variations. On obtient :



On conjecture que la limite en 0 de  $f(x)$  est  $+\infty$ , que la limite en  $+\infty$  est 0 et que la fonction semble décroissante sur  $]0; 1[$  puis décroissante sur  $]1; +\infty[$ .

2.  $f = \frac{u}{v}$  avec  $\begin{cases} u(x) = 1-3x \\ v(x) = x^2+x \end{cases}$ .

$$f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - vu'}{v^2} \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = -3 \\ v'(x) = 2x+1 \end{cases}$$

$$\text{On en déduit que : } f'(x) = \frac{-3(x^2+x) - (2x+1)(1-3x)}{(x^2+x)^2} = \frac{-3x^2-3x - [2x-6x^2+1-3x]}{(x^2+x)^2} = \frac{-3x^2-3x-2x+6x^2-1+3x}{(x^2+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2-2x-1}{(x^2+x)^2}$$

Le dénominateur est positif, donc l'expression est du signe du numérateur.

$\Delta = 16$ ; il y a deux racines,  $-\frac{1}{3}$  et 1.

Seul le nombre 1 est dans l'ensemble de définition.

On en déduit :

$x$	0	1	$+\infty$
$3x^2-2x-1$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		0

3. Étudions les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

- Limite en 0  $x > 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2+x) = 0 \text{ avec } x^2+x > 0 \text{ puisque } x > 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

- Pour  $x \neq 0$ ,  $f(x) = \frac{x(\frac{1}{x}-3)}{x^2(1+\frac{1}{x})} = \frac{\frac{1}{x}-3}{x(1+\frac{1}{x})}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}-3\right) = -3; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = +\infty.$$

Par conséquent :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  (avec  $f(x) < 0$ )

4. Les conjectures sont bien vérifiées.

