Correction des exercices de géométrie dans l'espace

I

Partie A

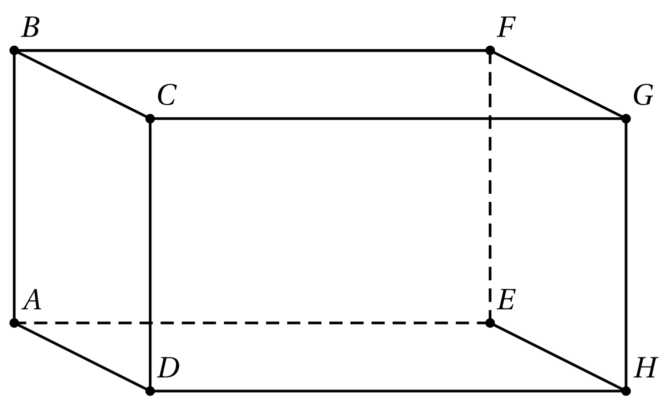
Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère les points A(3 ; −2 ; 2), B(6 ; 1 ; 5) et C(6 ; −2 ; −1).
Déterminons par des calculs la nature du triangle ABC.

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ donc $AB=\sqrt{3^3+3^3=3^3}=\sqrt{3\times3^2}=\boxed{3\sqrt{3}=\sqrt{27}}$
- $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}$ donc $BC=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2}=\boxed{\sqrt{45}=\sqrt{3^2\times5}=3\sqrt{5}}$
- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ donc $AC=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\sqrt{2\times3^2}=\boxed{\sqrt{18}=2\sqrt{3}}$.

Il est clair que ABC n'est pas isocèle (donc pas équilatéral).
BC est la plus grande longueur :
$BC^2=45$; $AB^2+AC^2=27+18=45$ donc $BC^2=AB^2+AC^2$.
Après la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle ABC est **rectangle en A**.
Remarque : on peut aussi calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et montrer qu'il est nul.

Partie B

On considère un parallélépipède rectangle ABCDEFGH.



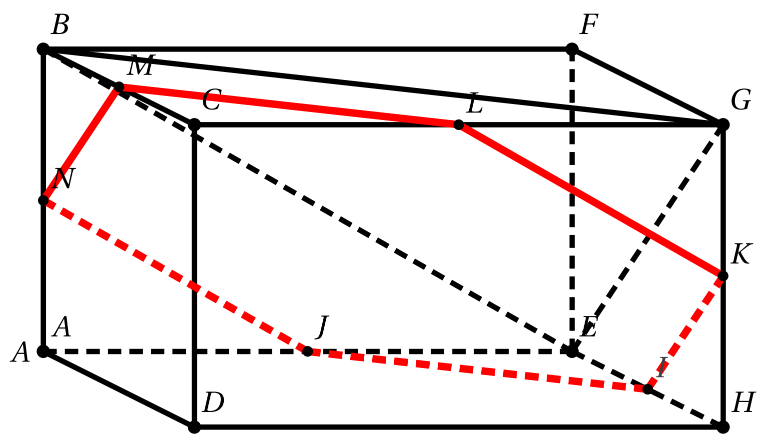
Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant avec soin.

- Affirmation 1 : les plans (HAE) et (BGC) se coupent selon la droite parallèle à (HA) passant par F.
  FAUX :
  les plans sont strictement parallèles, donc ne se coupent pas !
- Affirmation 2 : les droites (BE) et (FG) sont orthogonales.
  VRAI : ls deux droites sont incluses respectivement dans deux plans orthogonaux (BEF) et (FGH).
- Affirmation 3 : on appelle I le milieu du segment [EH].
  La section du parallélépipède par le plan parallèle à (EGB) passant par I est un trapèze (un tracé suffit à justifier la réponse). **FAUX** :

- Notons $\mathscr{P}$ ce plan passant par I et parallèle au plan (EGB).
  (EGB) coupe les plans (EGB) et $\mathscr{P}$ selon deux droites parallèles. $\mathscr{P}$ coupe les plans (BCG) et (ADH) selon deux droites parallèles, donc coupe (ADH) selon une droite passant par I et parallèle à (BG). D'après la réciproque du théorème de Thalès, elle coupe [AE] en J, milieu de ce segment.
- De même, (EGB) et $\mathscr{P}$ sont parallèles, donc coupent le plan (EFG) selon deux droites parallèles. Après la réciproque du théorème de Thalès, on obtient comme section [IK] où K est le milieu de [GH].
- De même, $\mathscr{P}$ coupe (DCG) selon (KL) où L est le milieu de [CG].
- La section de $\mathscr{P}$ avec (BCG) est le segment [LM], passant par L et parallèle à (BG), donc M est le milieu de [BC].
- La section de $\mathscr{P}$ avec (ABC) est [MN] où N est le milieu de [AB].
- La section de $\mathscr{P}$ avec le plan (AEF) est le segment [NJ].

La section de $\mathscr{P}$ avec le parallélépipède est donc l'hexagone IJKLMN (dont les côtés opposés sont parallèles), mais **pas un trapèze**

Représentation de la section :

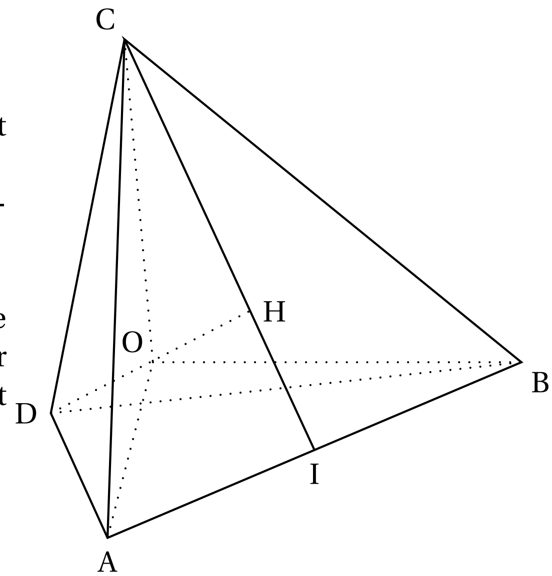


Partie C

On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\,;\,\overrightarrow{AB}\right)$.
Les coordonnées de B, E, G et I sont :
B$(0\,;\,0\,;\,1)$; E$(0;1;0)$, G$(1;1;1)$ et I$\left(\dfrac{1}{2}\,;\,1\,;\,0\right)$

Métropole juin 2003

Soient a un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :
• OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,
• OA = OB = OC = a.
On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par
$\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.



1. OAB, OAC et OBC sont rectangles isocèles en O, donc leurs hypoténuses AB, AC et BC ont la même longueur $\boxed{a\sqrt{2}}$ (que l'on calcule avec le théorème de Pythagore).
   Donc ABC est un triangle équilatéral.
2. (a) (CI) étant hauteur du triangle isocèle ABC, la droite (CI) est **perpendiculaire** à la droite (AB).
   (b) (CI) est aussi médiane, donc I est le milieu de [AB] ; donc dans le triangle OAB isocèle en O la droite (OI) médiane est aussi hauteur donc (OI) est **perpendiculaire** à (AB).
   (c) **Conclusion** : la droite (AB) perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (OIC), est orthogonale à toute droite de ce plan donc en particulier à (OH).
   (OH) orthogonale aux deux droites sécantes (IC) et (AB) est orthogonale au plan (ABC) donc en particulier à la droite (BC).
   (d) (OA) est orthogonale aux deux droites sécantes (OB) et (OC), donc au plan (OBC) et en particulier à la droite (BC).

   Conclusion : (BC) est orthogonale à (OH) et à (OA) donc au plan (OHA) et en particulier à la droite (AH) qui est donc une hauteur du triangle (ABC) ; H commun à deux hauteurs du triangle (ABC) est **l'orthocentre** de ce triangle.
3. Calcul de OH
   (a) On peut prendre comme base le triangle rectangle isocèle OAB et comme hauteur [OC].
   $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} a \times a \times a = \boxed{\frac{a^3}{6}}$.
   On prend maintenant comme base le triangle équilatéral ABC et comme hauteur [OH]
   $\mathscr{A}(\text{ABC}) = \frac{1}{2} \times \text{AB} \times \text{CI} = \frac{1}{2} \times a\sqrt{2} \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{a^2\frac{\sqrt{3}}{2}}$.
   (b) On a donc $V = \frac{a^3}{6} = a^2\frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{OH} \iff \text{OH} = \frac{2}{6\sqrt{3}} a = \boxed{a\frac{\sqrt{3}}{3}}$.
4. (a) On a vu que (ABC) est équilatéral et que H en est l'orthocentre, donc aussi le centre de gravité soit l'isobarycentre (centre de gravité) des points A, B, et C. Les coordonnées de H sont donc : $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$.

(b) Le point D est le symétrique de H autour de O ses coordonnées sont donc : $\left(-\dfrac{a}{3},\ -\dfrac{a}{3},\ )\dfrac{a}{3}\right)$.

$\text{AD2} = \left(a+\dfrac{a}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{3}\right)^2 = \dfrac{16a^2}{9} + \dfrac{a^2}{9} = \dfrac{18a^2}{9} = 2a^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \text{AD} = a\sqrt{2}$.

Le calcul est le même pour BD et CD, donc finalement AB = BC = CA = AD = BD = CD = $a\sqrt{2}$: le tétraèdre ABCD est régulier.

(c) Les points équidistants de A, de B et de C appartiennent aux plans médiateurs de [AB] et de [BC],donc à leur intersection la droite (OH).

Ce centre du cercle Ω a donc pour coordonnées $(x\ ;\ x\ ;\ x)$ et on doit avoir $\Omega\text{A} = \Omega\text{D} \Rightarrow \Omega\text{A}^2 = \Omega\text{D}^2 \iff (x-a)^2 + x^2 + x^2 = 3\left(x+\dfrac{a}{3}\right)^2 \iff$

$3x^2 + a^2 - 2ax = 3x^2 + \dfrac{a^2}{3} + 2ax \iff 4ax = \dfrac{2a^2}{3} \iff x = \dfrac{a}{6}$.

Donc $\Omega\left(\dfrac{a}{6}\ ;\ \dfrac{a}{6}\ ;\ \dfrac{a}{6}\right)$.