TS : correction du contrôle n° 1

I (3 points)

Démontrons par récurrence que, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

Notons $S_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, somme de $(n-1)$ termes.

- **Initialisation** : pour $n=2$: $1-\frac{1}{2^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ et $\frac{n+1}{2n}=\frac{2+1}{2\times 2}=\frac{3}{4}$ donc la propriété est vérifiée pour $n=2$.
- **Hérédité** : on suppose ma propriété vraie pour un entier $n \geqslant 2$ quelconque, donc

  $$S_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

  Alors : $S_{n+1}=S_n\times\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

  $=\frac{n+1}{2n}\times\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+1}{2n}\times\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$

  $=\frac{n+1}{2n}\times\frac{[(n+1)-1][(n+1)+1]}{(n+1)^2}=\frac{n+1}{2n}\times\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

  $=\boxed{\frac{n+2}{2n+1}}$ après simplification, ce qu'il fallait démontrer.

  La propriété est **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

II (6 points)

Calculer, en justifiant, les limites des suites (u_n) définies par :

1. $u_n=\frac{2n^2-3x+2}{1-n}$.

   On a une forme indéterminée.

   Pour $n\neq 0$, $u_n=\frac{n^2\left(2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n\left(\frac{1}{n}-1\right)}=n\times\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n}-1}$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n^2}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n}-1}\right)=2$.

   On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty}$.

2. $u_n=\frac{3n}{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

   - Pour $\frac{3n}{n+1}$, on a une forme indéterminée : $\frac{3n}{n+1}=\frac{3n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{3}{1+\frac{1}{n}}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3n}{n+1}\right)=3$
   - $-1<\frac{1}{2}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.
   - On en déduit, par somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3}$

3. $u_n=\frac{n+(-1)^n}{n^2+1}$.

   On a une forme indéterminée.

   $u_n=\frac{n\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$.

   - $-1\leqslant(-1)^n\leqslant 1$ donc $-\frac{1}{n}\leqslant\frac{(-1)^n}{n}\leqslant\frac{1}{n}$; comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)=0$ (théorème des gendarmes)
   - $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]=+\infty$.
   - Par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0}$

4. $u_n=5^n-4^n$.

   On a une forme indéterminée

   $u_n=5^n\left(1-\frac{4^n}{5^n}\right)=5^n\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$.

   - $-1<\frac{4}{5}<1$ dnc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$.
   - $5>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}5^n=+\infty$.
   - Par produit, on trouve $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty}$

III (5 points)

On pose $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout n non nul $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n$.

1. Calculons u_2, u_3, u_4.
   - $u_2 = u_{1+1} = \dfrac{1+1}{2\times 1} u_1 = \dfrac{2}{2} u_1 = u_1 = \boxed{\dfrac{1}{2}}$
   - $u_3 = \dfrac{2+1}{2\times 2} u_2 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2} = \boxed{\dfrac{3}{8}}$
   - $u_4 = \dfrac{3+1}{2\times 3} \times u_3 = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{8} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$.
2. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ pour n non nul.

   (a) Pour tout n, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{n+1} = \dfrac{\frac{n+1}{2n} u_n}{n+1} = \dfrac{1}{2n} u_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u_n}{n} = \dfrac{1}{2} v_n$ donc $\boxed{v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n}$.
   La suite (v_n) est donc géométrique, de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = \dfrac{u_1}{1} = u_1 = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Puisque (v_n) est géométrique, on a, pour tout $n \geqslant 1$: $v_n = v_1 q^{n-1} = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   $v_n = \dfrac{u_n}{n} \Rightarrow u_n = n v_n = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ donc $\boxed{u_n = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$.

   (c) On admet que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n} = +\infty$.
   Or, pour tout n, $u_n = \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{1}{\frac{n}{2^n}}$.
   Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2^n}{n}\right) = +\infty$, on en déduit : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

IV (6 points)

u et v sont deux suites définies par $u_0 = 20$, $v_0 = 60$ et pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{4} \text{ et } v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{4}$$

a) Pour tout n, $u_{n+1} + v_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{4} + \dfrac{u_n + 2v_n}{4} = \dfrac{3u_n + 3v_n}{4} = \dfrac{3}{4}(u_n + v_n)$ donc $u + v$ est géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$.

Pour tout n, $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{4} - \dfrac{u_n + 2v_n}{4} = \dfrac{u_n - v_n}{4} = \dfrac{1}{4}(u_n - v_n)$ donc $u - v$ est géométrique de raison $q' = \dfrac{1}{4}$.

b) Puisque $u + v$ est géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$, on a : $u_n + v_n = (u_0 + v_0) \times q^n = \boxed{80 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$.

De même : $u_n - v_n = (u_0 - v_0) \times q'^n = \boxed{-40 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n}$

c)
- En additionnant, on trouve $2u_n = 80 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 40 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ donc

$$\boxed{u_n = 40 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 20 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n}.$$

- En soustrayant : $2v_n = 80 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 40 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ d'où

$$\boxed{v_n = 40 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 20 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n}.$$

d) $-1 < \times \dfrac{3}{4} < 1$ et $-1 < \times \dfrac{1}{4} < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$.
On en déduit que : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$