TS : correction du contrôle

I

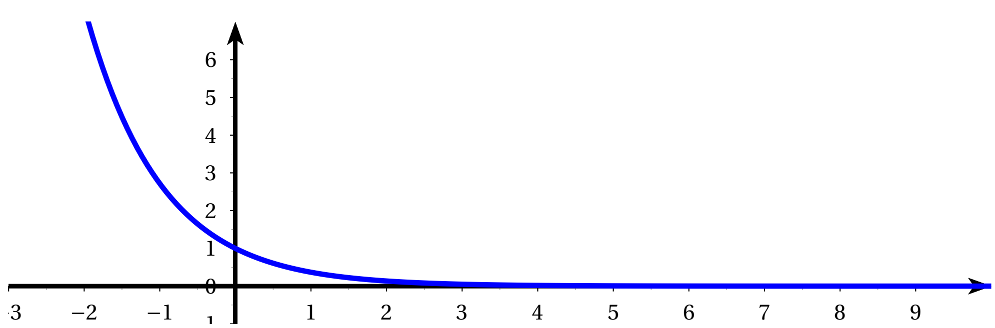
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)^2(n+4) = \left(n^2+2n+1\right)(n+4) = n^3+2n^2+n+4n^2+8n+4 = \boxed{n^3+6n^2+9n+4}$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $S_n = \dfrac{1}{1\times 2\times 3} + \dfrac{1}{2\times \times 4} + \cdots + \dfrac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}$.
   Démontrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$:
   $$S_n = \frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{2\times \times 4} + \cdots + \frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$
   - **Initialisation** : Pour $n=1$, $\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} = \dfrac{1\times 4}{4\times 2\times 3} = \dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{1}{1\times 2\times 3} = \dfrac{1}{6}$ donc la propriété est vraie au rang $n=1$.
   - **Hérédité** : on suppose la propriété vraie à un rang n quelconque donc
     $S_n = \dfrac{1}{1\times 2\times 3} + \dfrac{1}{2\times \times 4} + \cdots + \dfrac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.
     Au rang $n+1$:
     $S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$
     $= \dfrac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \dfrac{n\left(n^2+6n+9\right)+4}{4(n+1)(n+2)} = \dfrac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)} = \dfrac{(n+1)^2(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$
     $= \boxed{\dfrac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}}$ c.q.f.d.

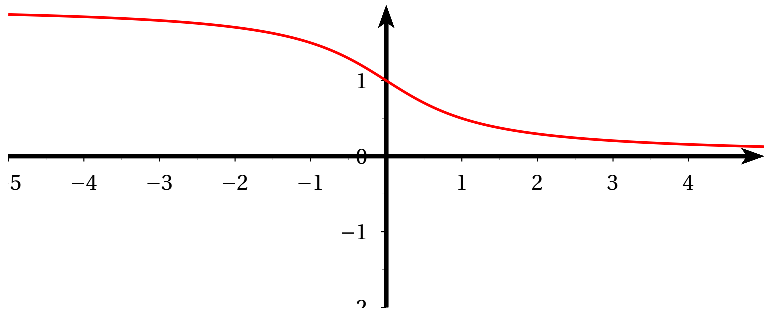
   La propriété est héréditaire.
   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

II Vrai ou Faux?

$\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative d'une fonction f. Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et **justifier** rapidement par une propriété ou un contre-exemple, éventuellement graphique.

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -5$, alors $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale.
   VRAI : l'asymptote a pour équation $y=-5$.
2. Si $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=2$, alors l'équation $f(x)=2$ n'a pas de solution.
   FAUX : exemple : $f(x) = 2 + \dfrac{\sin x}{x^2+1}$.
3. Si f est définie sur $\mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
   FAUX : le comportement en $+\infty$ n'a rien à voir avec le comportement en $-\infty$.
   Contre-exemples graphique :

a) 



b)

4. Si pour tout réel de $]1\,;\,+\infty[$, $\dfrac{1}{-x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   VRAI : $\displaystyle\lim_{x\to=\infty}\left(\frac{1}{-x^2+1}\right) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. Si, pour tout réel x de $]-\infty\,;\,0[$, $x^3+1 \leqslant f(x)$, alors $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

   FAUX : il suffit de prendre $f(x) = 1$! Pour tout $x \leqslant 0$, $x^3 \leqslant 0$ donc $x^3+1 \leqslant 1 = f(x)$; $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$!

6. Si f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ et est telle que, pour tout tel $x \geqslant 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

   VRAI : Si $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$, alors, pour $x > 0$, $0 \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

   Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$.

   D'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 0$.

III Calcul de limites

Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2+3x^2}\right)$

Pour $x \neq 0$, $\dfrac{x}{2+3x^2} = \dfrac{x}{x^2\left(\frac{2}{x^2}+3\right)} = \dfrac{1}{x\left(\frac{2}{x^2}+3\right)}$.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x^2}+3\right) = 3$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x\left(\frac{2}{x^2}+3\right)\right) = -\infty$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2+3x^2}\right) = 0}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{9x^2+1}{x^2-4x+5}\right)$

Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{9x^2+1}{x^2-4x+5} = \dfrac{x^2\left(9+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)} = \dfrac{9+\dfrac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(9+\frac{1}{x^2}\right) = 9$ et $\displaystyle\lim_{x\to=\infty}\left(1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right) = 1$, d'où, par quotient : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{9x^2+1}{x^2-4x+5}\right) = 9}$

c) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\left(\frac{x}{4-x^2}\right)$.

$\displaystyle\lim_{x\to-2} x = -2$; $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\left(4-x^2\right) = 0$ avec $4-x^2 < 0$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\left(\frac{x}{4-x^2}\right) = +\infty}$ (quotient de nombres négatifs)

IV Vrai ou faux ?

On considère une suite (u_n) positive et la suite (v_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$. **VRAI** : il est clair, par récurrence, que tous les termes sont positifs.
   $0 \leqslant u_n < u_n + 1$ donc $\dfrac{u_n}{u_n+1} < 1$.
2. Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente. **VRAI** : on suppose que (u_n) converge vers $\ell \geqslant 0$ (puisque la suie est positive), alors $u_n + 1$ tend vers $\ell + 1$ donc (v_n) converge vers $\dfrac{\ell}{\ell+1}$.
3. Si la suite (u_n) est croissante, alors (v_n) est croissante.
   VRAI : on suppose (u_n) croissante, donc, pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
   Alors $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1}}{1+u_{n+1}} - \dfrac{u_n}{1+u_n} = \dfrac{u_{n+1}(1+u_n) - u_n(1+u_{n+1})}{(1+u_{n+1})(1+u_n)} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{(1+u_{n+1})(1+u_n)}$.
   $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ par hypothèse ; l dénominateur est positif comme produit de nombres positifs, donc (v_n) est croissante.
4. Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente. **FAUX** :
   $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} \Leftrightarrow v_n(1+u_n) = u_n \Leftrightarrow u_n v_n - u_n = -v_n \Leftrightarrow u_{n(v_n-1)} = -v_n \Leftrightarrow u_n = -\dfrac{v_n}{v_n - 1} = \dfrac{v_n}{1-v_n}$.
   Si (v_n) converge vers 1, (u_n) **diverge**.

V

On considère un cube ABCDEFGH. Les points I, J et K sont respectivement les milieux des segments [BF], [EH] et [HD].
Dans chaque cas, donner la position relative des droites ou plans considérés :

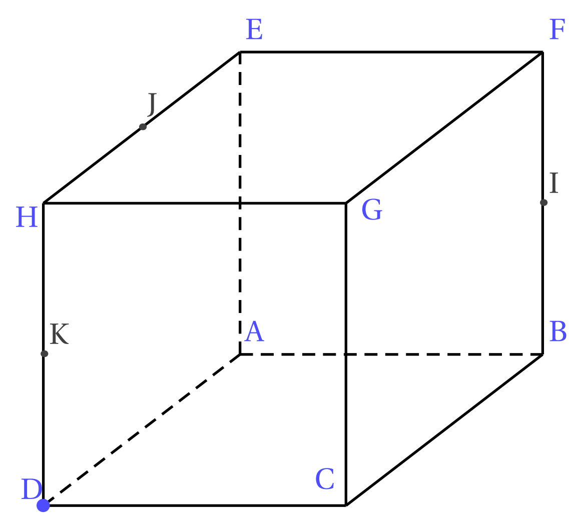
a) les droites (DG) et (EA) ne **sont pas coplanaires**

b) les droites (JK) et (ED) sont **parallèles** (coplanaires et en appliquant la réciproque du théorème de Thalès).

c) le plan (EFC) et la droite (JK) sont **parallèles** ; en effet, (JK) est incluse dans le plan (ADH) et (ADH) et (EFC) sont parallèles.

d) les plans (GHK) et (AIC) sont **sécants selon une droite qui passe par C**.

e) les droites (FK) et (BD) sont **sécantes** (coplanaires dans le plan (FBD) et non parallèles)



VI

On considère un cube ABCDEFGH. Les points I, J et K sont respectivement les milieux des segments [EF], [EH] et [HD].

1. • Les points I et J sont communs aux plans (EFG) et (IJK). Donc les plans (EFG) et (IJK) sont **sécants selon la droite (IJ)**.
   • Les points J et K sont communs aux plans (AED) et (IJK) donc les plans (AED) et (IJK) sont **sécants selon la droite (JK)**
2. Le point L appartient à la droite (AE) et donc au plan (AEB).
   De même, le point L appartient à la droite (JK) et donc au plan (IJK).
   Le point L est donc commun aux plans (AEB) et (IJK).
   Or, le point I est aussi commun aux plans (AEB) et (IJK).
   Donc, les plans (AEB) et (IJK) sont **sécants selon la droite (IL)**.
3. Les plans (IJK) et (CDG) sont sécants selon une droite passant par le point K, commun aux deux plans.
   Les plans (ABE) et (CDG) sont parallèles, et sont coupés par le plan (IJK) selon deux droites qui sont parallèles entre elles.
   Or, (IJK) et (ABE) sont sécants selon la droite (IL). On en déduit que les plans (IJK) et (CDG) sont **sécants selon la parallèle à la droite (IL) passant le point K**.

Question bonus : Voilà la section du cube par le plan (IJK)